

# Optimisation topologique robuste avec microstructure incertaine pour la fabrication additive métallique

H. Masson<sup>1,2</sup>, E. Denimal-Goy<sup>2</sup>, M. Peigney<sup>1</sup>, L. Renson<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Navier, Univ. Gustave Eiffel, ENPC, CNRS, Champs-sur-Marne, France

<sup>2</sup> Inria, CMAP, Ecole Polytechnique, IPP, Palaiseau, France

<sup>3</sup> Dynamics Groups, Imperial College London, London, United Kingdom

**Résumé** — Ce travail propose de prendre en compte la variabilité de microstructure observée en fabrication additive métallique à travers un modèle matériau simple et incertain. Ce modèle est intégré à une optimisation topologique par densité, pour une minimisation de souplesse. Les incertitudes sont propagées par quadrature de Gauss. La méthode réduit la variabilité de performance des formes optimisées, même dans le cas de propriétés matériaux réalistes. Des premiers résultats sur un cas industriel d'aube en 3D sont présentés.

**Mots clés** — Optimisation topologique, Optimisation robuste, fabrication additive métallique.

## 1 Introduction

Grâce à l'augmentation des puissances de calcul, l'optimisation structurelle est devenue une pierre d'angle de l'ingénierie. L'optimisation topologique est une méthode documentée permettant de trouver la répartition optimale de matière sous certaines contraintes de masse ou déplacement, sans aucune hypothèse préalable. Les formes complexes obtenues sont très performantes, mais uniquement obtenues par des procédés de fabrication additive (FA), qui induisent des défauts particuliers (porosité, anisotropie, et contraintes résiduelles).

La prise en compte de défauts de fabrication en optimisation topologique (*Topology Optimization - TO*) compte de nombreux travaux. Un premier groupe se base sur des simulations simplifiées du procédé pour obtenir des champs physiques inclus dans l'optimisation. Rajan et al. [1] utilise un modèle thermique simplifié pour identifier les zones de surchauffe, et la méthode des *Inherent Strains (IS)* représente un cadre prometteur pour la modélisation et prise en compte des contraintes résiduelles [2]. Néanmoins, ces simulations reposent sur de fortes hypothèses simplificatrices pour limiter l'explosion des temps de calcul. Un autre groupe de travaux s'oriente vers une modélisation incertaine de défauts et une formulation robuste du problème d'optimisation. L'objectif devient alors l'optimisation de performances en réduisant la sensibilité aux défauts. Des défauts géométriques ont été étudiés par Schevenels et al. [3], et Jansen et al. [4], en ajoutant des variables aléatoires de perturbation géométriques, puis propageant les incertitudes par méthode Monte Carlo. Dans le cadre plus général de TO robuste, il existe d'autres méthodes, tel que l'expansion de Karhunen-Loeve [5], ou l'expansion en polynômes du chaos [6].

Des études sur les propriétés mécaniques des alliages par FA métallique ont relevé une anisotropie, liée à la microstructure, la texture, et plus faiblement à la porosité [7]. La refonte partielle des couches précédente lors du dépôt favorise des grains verticaux et un module de Young plus faible dans cette direction [8]. De plus, la morphologie des grains est liée à la combinaison de vitesse de solidification et gradients thermiques qui peuvent changer en cours d'impression [9]. Une transition de morphologie de grain peut se produire en cours de fabrication, nommée transition colonnaire-équiaxe (*Columnar to Equiaxed Transition - CET*), conduisant à une variation de propriétés mécaniques. Ce travail propose un modèle mécanique simple de CET piloté par des paramètres aléatoires, afin de prendre en compte la variabilité de propriétés mécaniques liées au procédé de fabrication. Ce modèle est inséré dans une méthode d'optimisation topologique, où le problème est alors transformé en optimisation robuste. Ainsi, la sensibilité aux variations de CET est réduite. Une méthode de propagation d'incertitude efficace est mise en place pour calculer la fonction objectif robuste, et deux problèmes sont étudiés présentant différentes lignes de chargement. L'application de cette méthode à un cas industriel 3D en dernière partie ouvre sur

un exemple concret.

## 2 Méthode

### 2.1 Modèle matériau simple et incertain

Deux morphologies principales de grains existent dans les pièces de FA métallique : colonnaires, orientés parallèles à la direction de construction, et équiaxes, sans direction privilégiée. La présence d'une morphologie plutôt qu'une autre dépend des gradients thermiques et de la vitesse de solidification. Ces paramètres varient en fonction du procédé, mais l'accumulation de chaleur lors de la fabrication peut aussi changer les conditions de refroidissement et faire apparaître une CET au milieu de la pièce [9]. L'influence de la morphologie des grains sur les modules élastiques a été démontrée, ce qui justifie leur prise en compte en TO. Un modèle thermique complet pourrait être mis en place pour déterminer la position d'une CET à chaque itération, mais l'augmentation du coût de calcul rend cette solution peu intéressante en pratique.

Au lieu de prédire exactement sa géométrie, la CET est décrite par un modèle incertain [10]. Une géométrie simplifiée est adoptée dans ce travail, représentée Figure 1. Sans hypothèse sur la distribution de matière, la chaleur s'accumule verticalement, ce qui justifie d'avoir une CET continue et parallèle au plateau d'impression. Ce modèle géométrique est paramétrisé par un vecteur unitaire  $n$  et deux scalaires  $(a, \varepsilon)$ . En notant  $x$  les coordonnées dans le repère de référence, la région  $x \cdot n \geq a + \varepsilon$  est occupée par des grains équiaxes, alors que la région  $x \cdot n \leq a - \varepsilon$  est occupée par des grains colonnaires. La région intermédiaire  $a - \varepsilon \leq x \cdot n \leq a + \varepsilon$  est une zone de transition entre les deux morphologies. L'épaisseur  $2\varepsilon$  de cette transition est un paramètre dépendant du procédé.

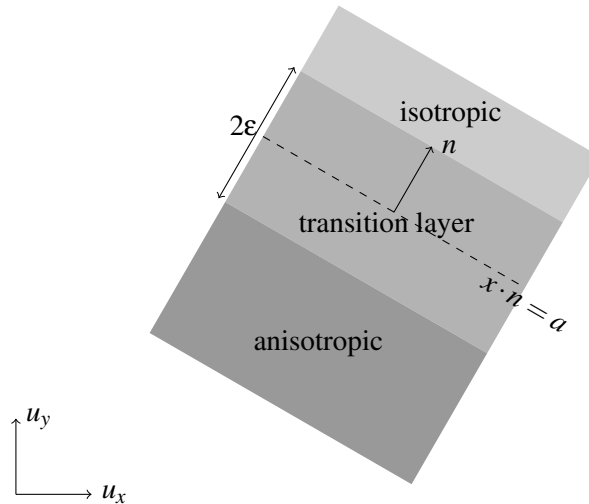


FIGURE 1 – Modèle de transition colonnaire-équiaxe.

Pour l'optimisation topologique élastique linéaire en souplesse, la morphologie des grains n'influe que sur les paramètres élastiques. A la partie colonnaire est associée un comportement isotrope transverse, et un comportement anisotrope pour les grains équiaxes. En se limitant à des problèmes 2D, la loi constitutive donne :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \mathbb{C} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où

$$\mathbb{C}_{aniso} = \begin{bmatrix} \frac{E_1^2}{E_1 - E_2\nu_{12}^2} & \frac{\nu_{12}E_1E_2}{E_1 - E_2\nu_{12}^2} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1E_2}{E_1 - E_2\nu_{12}^2} & \frac{E_1E_2}{E_1 - E_2\nu_{12}^2} & 0 \\ \frac{E_1 - E_2\nu_{12}^2}{0} & \frac{E_1 - E_2\nu_{12}^2}{0} & G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_{iso} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+\nu} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dans l'Équation (1),  $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$  (resp.  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ ) sont les composantes du tenseur de déformations  $\varepsilon$  (resp. contraintes  $\sigma$ ) dans une base orthogonale  $(u_1, u_2)$  où  $u_1$  est aligné avec l'axe des grains. Dans l'Équation (2),  $E_1$  et  $E_2$  sont les modules de Young dans les directions  $u_1$  et  $u_2$  respectivement,  $G_{12}$  le module de cisaillement, et  $\nu_{12}$  un des coefficient de Poisson.

Dans la zone de transition, une interpolation linéaire entre  $\mathbb{C}_{aniso}$  et  $\mathbb{C}_{iso}$  est utilisée, ainsi la matrice de rigidité  $\mathbb{C}(x)$  en  $x$  peut être écrite :

$$\mathbb{C}(x) = \frac{1}{2\varepsilon} ((x \cdot n - a + \varepsilon)\mathbb{C}_{aniso} + (a + \varepsilon - x \cdot n)\mathbb{C}_{iso})$$

Dans le cas 2D, le vecteur  $n$  définissant la direction de la CET est caractérisé par son angle  $\alpha$  avec le vecteur  $u_x$  du repère de référence  $(u_x, u_y)$ . La géométrie de la CET est donc paramétrisée par 3 scalaires  $(\alpha, a, \varepsilon)$ . Dans ce qui suit, ces 3 paramètre sont considérés comme aléatoires, suivant des lois de probabilité connues.

## 2.2 Optimisation topologique robuste

### 2.2.1 Cadre générale d'optimisation par densité

Un problème d'optimisation topologique classique est la minimisation de la souplesse  $C$  (*Compliance*). Ce problème consiste à déterminer la distribution optimale de matière dans un domaine  $\Omega$ , pour des conditions de chargement données. Cette distribution de matière peut être vue comme un champs de densité  $\rho$  sur le domaine. Pour mieux expliciter le problème, une charge en traction  $\mathbf{f}$  est appliquée sur la partie  $\Gamma_N$  du bord  $\partial\Omega$ . Une condition d'encastrement est appliquée sur la partie  $\Gamma_D$ . Dans cette contribution, la méthode SIMP [11] est utilisée pour effectuer l'optimisation topologique. Le problème est relaxé en introduisant des densité intermédiaires, qui sont pénalisées avec l'interpolation SIMP :  $\mathbb{C}(\rho) = \mathbb{C}_0 + \rho^p \times (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0)$ . D'après la littérature,  $0 < \mathbb{C}_0 \ll \mathbb{C}$  et un paramètre constant  $p = 3$  sont fixés au cours de l'optimisation pour des raisons de stabilité numérique et de convergence respectivement [11].

Pour éviter l'apparition d'effet de damier et pour imposer un échelle minimale de longueur sur la phase solide, un champs de densité filtré  $\tilde{\rho}$  est calculé à partir de  $\rho$  en résolvant un problème type Helmholtz [12]. Puisque le filtre réintroduit des densités intermédiaires à l'interface solide/vide, un champs projeté  $\bar{\rho}$  est calculé à partir de  $\tilde{\rho}$ , avec une version continue et dérivable de fonction Heavyside [12]. Ce sont les densités projetées auxquelles sont donné un sens physique et qui interviennent dans l'interpolation SIMP. L'équation d'équilibre est résolue par Analyse Elements Finis dans FreeFem++ [13]. La méthode de Critère d'Optimalité [11] est utilisée pour l'optimisation.

### 2.2.2 Optimisation robuste

Afin de prendre en compte les variabilités liées au modèle de CET proposé en Section 2.1, une stratégie de propagation d'incertitude est mise en place.

Le problème standard déterministe est remplacé par une formulation robuste, prenant en compte des incertitudes sur l'orientation, la position et l'épaisseur d'une CET, à travers le vecteur aléatoire  $\theta = (\alpha, a, \varepsilon)$ . En suivant une approche robuste, la fonction objectif est une somme pondérée de la souplesse moyenne et de son écart-type, notés  $\mathbb{E}[C(\bar{\rho}, \theta)]$  et  $\sigma[C(\bar{\rho}, \theta)]$  respectivement. De cette manière, les performances structurelles sont optimisées tout en réduisant la sensibilité de la solution aux incertitudes.

Le problème robuste s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\min_{\rho} : J(\rho) &= \omega_{\mathbb{E}} \mathbb{E}[C(\bar{\rho}, \theta)] + \omega_{\sigma} \sigma[C(\bar{\rho}, \theta)] \\
t.q. : \int_{\Omega} \nabla u(\theta) : \mathbb{C}(\bar{\rho}, \theta) : \nabla v(\theta) dx &= \int_{\Gamma_N} f \cdot v(\theta) ds \\
: u(\theta) &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_D \\
: v(\theta) &= 0, \quad \text{sur } \Gamma_D \\
: V(\bar{\rho}) &\leq V_0 \\
: 0 &\leq \rho \leq 1
\end{aligned} \tag{3}$$

avec  $J$  la fonction objectif,  $C$  la compliance,  $V$  et  $V_0$  le volume actuel et requis respectivement, et  $\omega_{\mathbb{E}}$  et  $\omega_{\sigma}$  sont des poids dans la fonction objectif permettant d'ajuster la contribution de la moyenne ou de l'écart type dans l'optimisation.

L'estimation des moments statistiques peut être lourde en terme de temps de calcul puisqu'il faut le faire à chaque itération d'optimisation. La manière la plus traditionnelle d'estimer ces moments fait l'usage de méthodes d'échantillonnage, tel que la méthode de Monte Carlo (*Monte Carlo Sampling - MCS*), ou l'échantillonnage par hypercube latin (*Latin Hypercube Sampling - LHS*). La méthode MCS est très largement utilisée mais converge plus lentement que le LHS.  $N$  valeurs sont tirées des lois de probabilités des paramètres d'entrée, donnant un ensemble  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ . Pour chaque  $\theta_i$ , la souplesse  $C(\theta_i)$  et sa dérivée par rapport à la densité projetée  $\partial C(\bar{\rho}, \theta_i) / \partial \bar{\rho}$  sont calculées. La moyenne  $\mathbb{E}[C]^{(LHS)}$  et l'écart-type  $\sigma_C^{(LHS)}$  sont calculés classiquement,  $\mathbb{E}[C]^{(LHS)} = 1/N \sum_{i=0}^N C(\theta_i)$  et  $\sigma_C^{(LHS)} = \sqrt{1/N \sum_{i=0}^N (C(\theta_i) - \mathbb{E}[C]^{(LHS)})^2}$ .

Lorsque la loi de probabilité est connue, et que le nombre de dimensions est faible, la méthode de quadrature gaussienne (*Gaussian Quadrature - GQ*) est très efficace pour estimer des intégrales [14], comme les moments statistiques. Pour les problèmes étudiés dans cette étude, la quadrature gaussienne nécessite 10 fois moins de points pour une convergence équivalente, comparé au LHS. En dimension 1, l'approximation de la moyenne et de l'écart-type de la souplesse par GQ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C]^{(Gauss)} &= \int_{\Omega} C(\theta) \Pi(\theta) d\theta \simeq \sum_{i=1}^{N_S} w_i C(\theta_i) \\
\sigma_C^{(Gauss)} &= \sqrt{\mathbb{E}[C^2]^{(Gauss)} - \mathbb{E}[C]^{(Gauss)2}} \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{N_S} w_i C^2(\theta_i) - \left( \sum_{i=1}^{N_S} w_i C(\theta_i) \right)^2}
\end{aligned}$$

où  $C$  est la souplesse,  $\theta$  le paramètre aléatoire, et  $\Pi$  sa distribution.  $w_i$  sont les poids associés aux nœuds  $\theta_i$ , et  $N_S$  le nombre totale de nœuds. La méthode donne les valeurs de  $\theta_i$  et  $w_i$  en fonction de la distribution de  $\theta$ . En plus grande dimension, l'extension est directe, en construisant les poids et nœuds par tensorisation.

Une étude de convergence sur différents paramètres de la CET et différents champs de densité a montré que 1000 points ne suffisaient pas pour garantir une convergence en MCS, alors que 50 tirages LHS et 5 nœuds de GQ donnaient des valeurs de moyenne et écart-type de souplesse à moins de 1% de leur valeur de référence (LHS à 500 points).

### 3 Résultats

Deux problèmes sont étudiés, une poutre console et une forme plus complexe appelée forme-Z, pour mettre en lumière les impacts de la méthode sur des lignes de chargement différentes. Ces problèmes sont illustrés Figure 2(a,b) où sont précisés domaine d'optimisation et conditions limites. Tous les exemples sont maillés par éléments triangulaires, le premier en compte 14533 et la forme-Z près de 20073.

Pour les paramètres d'optimisation, le rayon du filtre est fixé à  $R = 0.36m$  par essai-erreur pour garantir une échelle minimale de longueur cohérente avec la taille des éléments. Le coefficient  $\beta$  de la projection Heaviside est initialisé à 1 puis doublé toutes les 50 itérations. L'algorithme s'arrête à 200

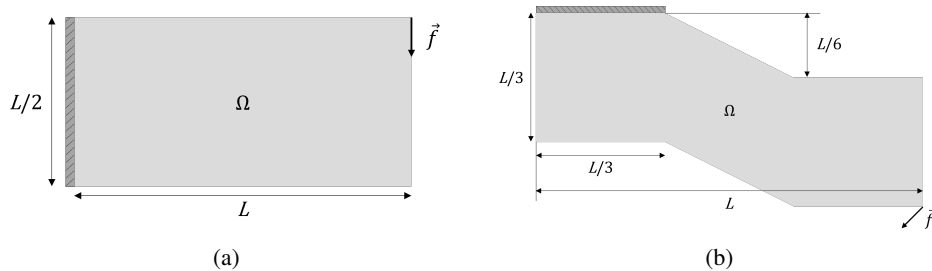


FIGURE 2 – Domaine d’optimisation et conditions limites pour le premier et deuxième exemple test

itérations, garantissant un design en noir et blanc, et une convergence vérifiée empiriquement. A partir de la littérature, deux jeux de propriétés élastiques ont été choisis. Dans le premier, nommé *Modèle*, le module de Young dans la direction de construction est 4 fois plus faible que dans le plan. L’objectif est d’accroître les différences visuelles pour mieux comprendre l’impact de l’anisotropie. Dans le second, des valeurs réalistes d’anisotropie d’acier 316L sont considérées, avec un module de Young 25% plus petit dans la direction de construction, avec pour objectif de voir si la méthode proposée améliore significativement les performances dans un cas plus réaliste. Les autres coefficients élastiques sont tirés de la littérature sur les alliages de FA. Les lois de probabilité gouvernant les trois paramètres  $(\alpha, a, \varepsilon)$  sont données dans le Tableau 1.

	Loi	min	max
$\alpha$	Uniforme	$-\pi/4$	$\pi/4$
$a$	Uniforme	$0.2L_{BD}$	$0.8L_{BD}$
$\varepsilon$	Uniforme	0	$0.5L_{BD}$

TABLE 1 – Propriétés des paramètres aléatoires

Pour rendre l’analyse des résultats plus claire, les notations suivantes sont proposées :

- $J_0^{(d)}$  la fonction objectif pour le cas déterministe, avec un matériau isotrope homogène,
- $J^{(r)}$  la fonction objectif robuste,
- $\bar{J}^{(d)}$  la fonction objectif du cas déterministe pour une unique transition fixée aux valeurs moyennes des paramètres  $(\alpha, a, \varepsilon)$

Les exposants  $(d)$  et  $(r)$  signifient respectivement ‘déterministe’ et ‘robuste’, pour mettre en valeur la nature de la fonction objectif. A partir de ces fonctions objectifs, sont définis les champs de densité qui minimisent chacune notés  $\rho_0^{(d)}$ ,  $\rho^{(r)}$  et  $\bar{\rho}^{(d)}$ . Ainsi, pour comparer les différents designs, il faut s’intéresser aux quantités  $J^{(r)}(\rho_0^{(d)})$ ,  $J^{(r)}(\rho^{(r)})$  et  $J^{(r)}(\bar{\rho}^{(d)})$ . En effet, il est intéressant de comparer les performances dans le cas robuste de solutions obtenues par optimisation robustes et chères en calcul à des solutions déterministes.

### 3.1 Optimisation robuste avec 1 paramètre incertain

Dans ce qui suit, l’impact de l’incertitude de la transition est étudiée à travers un unique paramètre, la distance au plateau d’impression  $a$ . Les autres paramètres de CET sont fixés à leur valeur moyenne. La partie anisotrope se trouvera dans la moitié droite de la pièce, et la partie isotrope dans la moitié gauche.

A des fins de référence, les designs obtenus avec un matériau isotrope homogène se trouvent dans la première colonne du Tableau 2. Le champs  $\rho_0^{(d)}$  correspondant minimise  $J_0^{(d)}(\rho^{(d)}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{C}_{iso} : \sigma$ , sujet aux contraintes de l’Équation (3).

Premièrement, la performance  $J_0^{(d)}$  du design  $\rho_0^{(d)}$  est de 3.53 pour la poutre console, et de manière générale,  $J_0^{(d)}(\rho_0^{(d)}) \leq J^{(r)}(\rho_0^{(d)})$ . C’est une conséquence directe que  $\mathbb{C}_{aniso} - \mathbb{C}_{iso}$  est une matrice définie positive. Les champs robustes  $\rho^{(r)}$  minimisant  $J^{(r)}$  se trouvent en troisième colonne. Les performances en souplesse moyenne et écart-type de souplesse sont meilleures avec le champs robuste par rapport à la référence  $\rho_0^{(r)}$ , pour les deux problèmes. Ainsi, la pièce obtenue est à la fois plus rigide et moins sensible aux incertitudes de CET. Les différences de topologie et de distribution de matière dans les





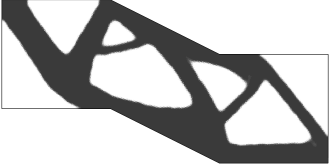

$\rho_0^{(d)}$ (référence)	$\bar{\rho}^{(d)}$	$\rho^{(r)}$
 $\mathbb{E}_C = 4.873, \sigma_C = 1.084$	 $\mathbb{E}_C = 4.693, \sigma_C = 1.115$ -3.7%, +2.9%	 $\mathbb{E}_C = 4.624, \sigma_C = 0.940$ -5.1%, -13.3%
 $\mathbb{E}_C = 11.2, \sigma_C = 1.794$	 $\mathbb{E}_C = 10.706, \sigma_C = 1.759$ -4.4%, -2.0%	 $\mathbb{E}_C = 10.545, \sigma_C = 1.534$ -5.8%, -14.5%

TABLE 2 – Résultats d’optimisation topologique pour position variable de CET, avec angle et épaisseur fixée, paramètres matériaux type *Modele*, poutre console et forme en Z

cas robustes sont à mettre en lien avec la direction de l’anisotropie. Il est rappelé que la moitié droite de la pièce est anisotrope avec une matière plus souple dans la direction horizontale. Il y a donc une organisation de la structure plus verticale dans la partie droite, pour tirer partie du module de cisaillement et réduire la souplesse. Pour la forme en Z, les éléments chargés en compression ou traction dans le sens de l’anisotropie se retrouvent plus épais pour compenser, ce qui montre que les solutions robustes s’adaptent à la CET.

Deuxièmement, dans la seconde colonne du Tableau 2, se trouvent les designs  $\bar{\rho}^{(d)}$  minimisant la fonction objectif  $\bar{J}^{(d)}$ . Optimiser dans ce cas est plus rapide car ne nécessite qu’un calcul EF par itération d’optimisation. Des changements de distribution de matière similaires aux designs robustes sont observés, qui témoignent de la prise en compte de l’anisotropie, ce qui se reflète dans la souplesse moyenne et son écart-type. En effet, les  $\bar{\rho}^{(d)}$  réduisent la souplesse moyenne  $\mathbb{E}_C$ , avec des valeurs similaires à celles de  $\rho^{(r)}$ . En revanche, ces designs ne sont pas capables de garantir une réduction de variabilité. Cela suggère que lorsqu’on s’intéresse uniquement à la souplesse moyenne, les champs  $\bar{\rho}^{(d)}$  sont intéressants, ce qui n’est pas le cas lorsque le poids de la variabilité dans la fonction objectif augmente.

### 3.2 Cas industriel

Pour le dernier exemple, l’intérieur d’une aube de turbine est optimisé, permettant de démontrer l’extension à un problème 3D. Une méthode à 2 maillages est utilisée. Le premier maillage sert de domaine d’optimisation  $\Omega_I$  (Interne), dans lequel sont manipulées les densités. Il se trouve à l’intérieur de l’aube et doit être maillé assez finement pour observer des variations de densité dans l’épaisseur de l’aube. Un second maillage reprend la géométrie entière de l’aube avec ses conditions aux limites, sur lequel sont calculés les champs mécaniques. Le domaine associé est noté  $\Omega_F$  (Full). Les deux maillages ont été créés de façon à garder la même position des nœuds qui sont partagés. Les différents maillages sont représentés en coupe Figure 3. L’optimisation topologique est réalisée uniquement sur  $\Omega_I$ , à droite sur la figure.

A chaque itération, les densités de  $\Omega_I$  sont projetée sur  $\Omega_F$ , en forçant les densités de  $\Omega_F - \Omega_I$  à 1. Les champs de déplacement sont projetés de  $\Omega_F$  sur  $\Omega_I$ , ce qui permet de calculer le gradient de la fonction objectif sur  $\Omega_I$  et mettre à jour le champ interne de densités. Pour le cas d’une CET en 3D, un nouveau paramètre aléatoire d’angle doit être ajouté, nommé  $\gamma$ . Il porte les mêmes caractéristiques que  $\alpha$ . Les 3 paramètres incertains  $(\alpha, a, \gamma)$  sont pris en compte et suivent les distributions du Tableau 1. Le calcul des moments statistiques se fait avec 50 points en LHS, ce qui est suffisant d’après une étude de convergence. Deux forces sont appliquées sur la face supérieure l’aube pour calculer sa souplesse, une verticale en traction de  $10^4$  N, et une horizontale pour mettre en flexion l’aube dans sa section la plus

fine, de  $10^5$  N. Les déplacements sont fixés sur les faces latérales du pied de l'aube.

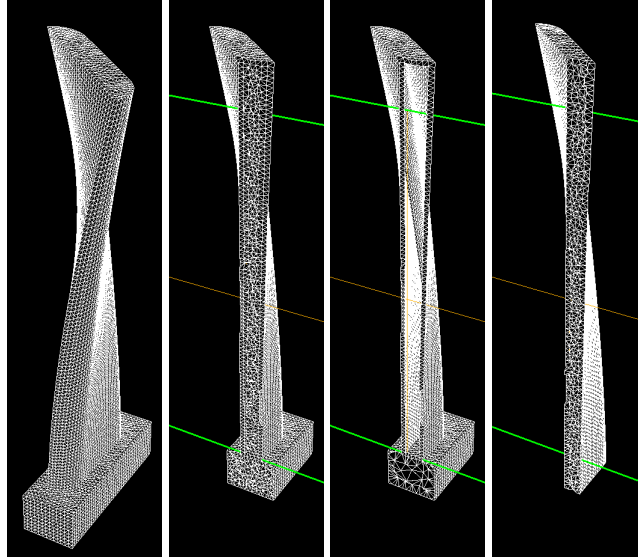


FIGURE 3 – Exemple des 2 maillages ( $\Omega_F$ ,  $\Omega_F$  en coupe,  $\Omega_F - \Omega_I$  en coupe, et  $\Omega_I$  en coupe) pour une aube.

Les champs de densités obtenus pour une optimisation déterministe isotrope et pour une CET à 3 paramètres aléatoires sont représentés Figure 4. Les deux cas montrent un agencement vertical du champ de densité qui relie la face supérieure chargée au pied de l'aube, plus prononcé dans le cas isotrope. Les densités sont concentrées dans la partie inférieure de l'aube, où se trouve la matière isotrope. Dans la partie supérieure se trouve la partie anisotrope de la CET, où la matière est plus souple dans la direction verticale. Des cavités se trouvent dans les deux designs, bien que pour le cas robuste, on en trouve globalement plus proche du pied de l'aube, comme on peut le voir Figure 4, par les bulles bleues de plus faibles densités.

Avec ce chargement, l'aube est soumise à une combinaison de traction et de flexion, donnant lieu à des champs de densité adaptés. En effet, la section horizontale de l'aube n'est pas symétrique par rapport au chargement en flexion, ceci explique pourquoi il y a plus de matière sur une face que sur l'autre (cf Figure 4 où l'on aperçoit plus de trous sur la 3<sup>e</sup> image que sur la 2<sup>e</sup> en pied d'aube). Par ailleurs, malgré une augmentation de la taille du filtre de densité, des éléments locaux de matière peuvent apparaître comme on peut le voir Figure 4 (2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>). Il est à noter que ces éléments sont détachés en considérant  $\Omega_I$ , mais la présence de la peau dans  $\Omega_F$  les rends connectés à la structure. Cette peau rend leur élimination par l'optimiseur plus complexe parce qu'ils peuvent facilement contribuer faiblement à la rigidité de la pièce. Dans un cas sans peau, aucun effort ne serait transmis à ces parties et elles seraient éliminées plus rapidement. En terme de performances, on a  $J^{(r)}(\rho_0^{(d)}) = 8.64 \times 10^6$  ( $\mathbb{E}_C = 7.98 \times 10^6$ ,  $\sigma_C = 6.65 \times 10^5$ ) et  $J^{(r)}(\rho^{(r)}) = 8.42 \times 10^6$  ( $\mathbb{E}_C = 7.84 \times 10^6$ ,  $\sigma_C = 5.81 \times 10^5$ ), c'est à dire une diminution de 2.5% de la souplesse moyenne et de 12% de la variation de souplesse. Les déformations les plus importantes sont liées à la flexion en pied d'aube, ce qui se retrouve par beaucoup de densité égales à 1 dans le cas isotrope. En revanche, lorsqu'on introduit la CET, il y a une répartition plus égale dans le cas robuste, qui mène à de meilleures performances.

## 4 Conclusion

Cet article présente une méthode d'optimisation topologique prenant en compte une variabilité de fabrication additive métallique à travers une formulation robuste. Dans le cadre de la méthode SIMP, un modèle mécanique simple et incertain de CET est développé et les incertitudes sont propagées efficacement par GQ. Une première étude sur deux cas académiques montre que les designs optimaux s'adaptent bien à l'anisotropie, et qu'ils améliorent substantiellement les performances en moyenne et en variabilité. De plus, il a été démontré que l'optimisation robuste, bien que plus coûteuse, garantit des gains plus importants qu'un cas déterministe. La méthode a été étendue à un cas 3D qui a demandé la mise en place

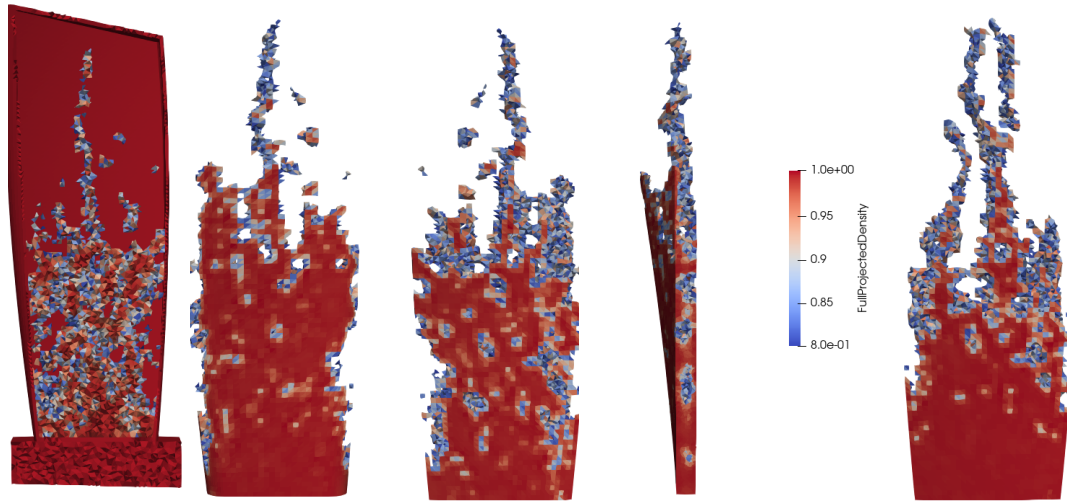


FIGURE 4 – Champ de densité obtenu pour une optimisation robuste, avec CET à 3 paramètres incertains. Coupe du champ de densité complet, densité interne recto et verso, coupe dans l'épaisseur de l'aube, et champ déterministe avec matériau isotrope (référence).

d'un traitement particulier de plusieurs maillages. Les résultats obtenus montrent l'intérêt des méthodes d'optimisation topologiques robustes dans des contextes industriels.

## Références

- [1] R Ranjan, C Ayas, M Langelaar, and F van Keulen. Controlling local overheating in topology optimization for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 65(6) :162, May 2022.
- [2] L Komini, M Langelaar, and B Kriegesmann. Robust topology optimization considering part distortion and process variability in additive manufacturing. *Advances in Engineering Software*, 186 :103551, 2023.
- [3] M Schevenels, BS Lazarov, and O Sigmund. Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(49) :3613–3627, 2011.
- [4] M Jansen, G Lombaert, M Diehl, BS Lazarov, O Sigmund, and M Schevenels. Robust topology optimization accounting for misplacement of material. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3) :317–333, Mar 2013.
- [5] S Chen, W Chen, and S Lee. Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainties. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4) :507–524, Apr 2010.
- [6] M Tootkaboni, A Asadpoure, and JK Guest. Topology optimization of continuum structures under uncertainty – a polynomial chaos approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204 :263–275, 2012.
- [7] A Sola and A Nouri. Microstructural porosity in additive manufacturing : The formation and detection of pores in metal parts fabricated by powder bed fusion. *Journal of Advanced Manufacturing and Processing*, 1(3) :e10021, 2019.
- [8] S Dixit, S Liu, HA Murdoch, and PM Smith. Investigating build orientation-induced mechanical anisotropy in additive manufacturing 316l stainless steel. *Materials Science and Engineering : A*, 880 :145308, 2023.
- [9] J Maisonneuve. *Fabrication directe de pièces aéronautique en TA6V et IN718*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Nov 2008. thèse confidentielle jusqu'en 2011.
- [10] H Masson, M Peigney, and E Denimal-Goy. Robust topology optimization accounting for uncertain microstructural changes in metallic additive manufacturing, submitted 2025.
- [11] MP Bendsøe and O Sigmund. *Topology optimization. Theory, methods, and applications*. Springer, 01 2004.
- [12] F Wang, BS Lazarov, and O Sigmund. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6) :767–784, Jun 2011.
- [13] F Hecht. New development in freefem++. In *J. Num. Math.*, 2012.
- [14] TJ Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.