

Approche LaTIn isogéométrique immergée pour le traitement d'interfaces non-linéaires sur des maillages non-conformes

S. Giroud¹, P. Oumaziz¹, P. Cantin², R. Bouclier^{1,2,3}

¹ Institut Clement Ader (ICA), Université de Toulouse, INSA-ISAIE-Mines Albi-UPS-CNRS, UMR 5312

² Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), Université de Toulouse, UPS-INSIA-CNRS UMR5219

³ Institut Universitaire de France (IUF)

Résumé — Cette communication propose une méthode de simulation pour des microstructures composites de type matrice/fibres. Elle repose sur l'algorithme LaTIn, utilisée pour traiter le caractère non-linéaire des interfaces (contact ou délaminage). Elle est couplée à l'analyse isogéométrique (IGA) ainsi qu'à des méthodes de domaine fictif afin de simplifier la paramétrisation spline des maillages. Des termes de stabilisation sont ajoutés pour assurer le caractère bien posé de la formulation et éviter des oscillations aux interfaces. Des implémentations sous FEniCSx ont également été réalisées.

Mots clés — Décomposition de domaine, splines, FEniCSx, QUGaR, domaine fictif, interfaces non-linéaires, maillages non-conformes

1 Introduction

Au cours des dernières années, la fabrication additive s'est largement développée, avec notamment des procédés mettant en oeuvre des multi-matériaux. La fabrication additive composite ouvre alors de nouvelles perspectives pour la conception de pièces composites, mais pose de nouvelles difficultés pour le calcul de structure et la simulation numérique. On s'intéresse donc ici à des microstructures 2D de type matrice/fibres, où les fibres et la matrice interagissent de façon non-linéaire à travers, par exemple, une loi de contact ou de délaminage.

La méthode de simulation que nous proposons repose sur l'analyse isogéométrique (IGA) [4, 1]. Grâce à l'utilisation de fonctions splines, l'IGA permet de réduire considérablement le nombre de degré de liberté nécessaire par rapport à une approche éléments finis classique, tout en conservant une très bonne précision du calcul mécanique.

Toutefois, l'IGA présente un inconvénient majeur : l'utilisation des mêmes fonctions splines pour la description de la géométrie et pour l'analyse rend impossible l'intégration de formes complexes à l'intérieur d'un patch unique. Lorsqu'un domaine comporte des interfaces de géométrie complexe, la discrétisation spline doit être adaptée pour rester conforme à ces interfaces, ce qui conduit souvent à une subdivision en plusieurs patches. Cette opération devient rapidement laborieuse, en particulier dans des configurations comportant de nombreuses inclusions. Afin de contourner ce problème, on utilise donc des méthodes de domaine fictif [6, 9]. L'idée consiste à immerger un domaine complexe dans un domaine plus simple, généralement régulier, comme un rectangle en 2D. On remplace le domaine physique difficile à mailler par un domaine fictif qui le contient, ce qui permet d'utiliser des maillages réguliers. Les difficultés résident alors dans la formulation pour traiter des interfaces non-conformes, et dans l'implémentation, notamment pour le calcul des intégrales sur des éléments coupés ou sur les interfaces.

Afin de traiter les non-linéarités locales présentes aux interfaces matrice/fibres, nous utiliserons la méthode LaTIn [8, 7], considérée comme un solveur non-linéaire basé sur la décomposition de domaine. Celle-ci sépare le traitement des non-linéarités locales de celui des équations globales, ce qui permet, dans de nombreux cas, d'obtenir des solutions explicites au problème local. La résolution des sous-problèmes linéaires associés à chaque sous-domaine peut être parallélisée naturellement.

La contribution principale de cette communication est donc de formuler le couplage au travers des interfaces non-conformes et non-linéaires. On s'inspirera de [3] qui ont développé une approche éléments finis (CutFEM-LaTIn), avec des triangles, à bas degré. De plus, une approche LaTIn isogéométrique avait été développée dans [5] ajoutant une couche d'éléments conformes aux interfaces. Ceci permettant

de modifier le maillage afin de transformer les interfaces non-linéaires et non-conformes en des interfaces non-conformes mais parfaites et des interfaces conformes mais non-linéaires. Le but de ces travaux est de supprimer cette surcouche conforme, et de coupler la LaTIn à l'IGA, potentiellement haut-dégré. On remplace les triangles utilisés dans [3] par des quadrangles.

2 Description du problème de référence

On considère deux domaines Ω_m et Ω_f représentant respectivement la matrice et la fibre, où la fibre est totalement incluse dans la matrice. On se limite ici à une inclusion pour simplifier la présentation de la méthode. (voir Fig. 1). La matrice et la fibre sont séparées par une interface Γ , qui porte potentiellement un comportement non-linéaire (contact unilatéral à ce stade). De plus, chaque sous-domaine est sous les hypothèses de l'élasticité linéaire isotrope en petites perturbations. Respectivement, Ω_m (Ω_f) est soumis à des efforts répartis f_m (f_f). Le bord de Ω_m est divisé en deux parties : Γ_{u_m} où on impose un déplacement u_m^d , et Γ_{F_m} , où on impose un effort linéique F_m .

Le problème s'écrit sous forme forte de la manière suivante : On cherche pour tout $i \in \{m, f\}$ le déplacement u_i qui vérifie les équations suivantes :

$$\operatorname{div}(\sigma_i) + f_i^g = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \quad \forall i \in \{m, f\}, \quad (1a)$$

$$\sigma_i = C_i \varepsilon(u_i) \quad \text{dans } \Omega_i \quad \forall i \in \{m, f\}, \quad (1b)$$

$$\sigma_m n_m = F_m \quad \text{sur } \Gamma_{F_m}, \quad (1c)$$

$$u_m = u_m^d \quad \text{sur } \Gamma_{u_m}. \quad (1d)$$

Ici, C_i désigne le tenseur de Hooke caractérisant le matériau et reliant le tenseur des contraintes σ_i au déplacement u_i via le tenseur des déformations ε . De plus, le comportement à l'interface est décrit par l'équilibre des contraintes et une fonction g qui décrit, d'un point de vue cinématique, le comportement de l'interface (interface parfaite, contact...)

$$\sigma_m n_m + \sigma_f n_f = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2a)$$

$$g(u_m, u_f, \sigma_m n_m, \sigma_f n_f) = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2b)$$

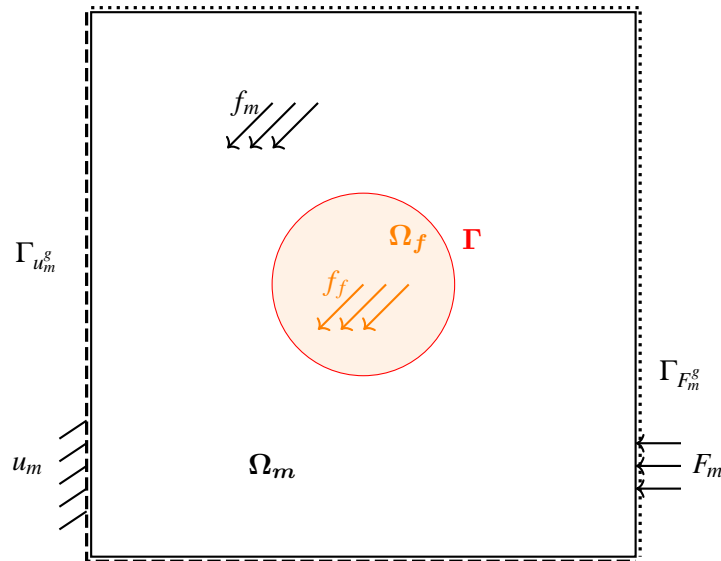


FIGURE 1 – Illustration du problème de référence : couplage de deux domaines (la matrice Ω_m et la fibre Ω_f) séparés par une interface Γ .

3 Méthode

3.1 LaTIn

Idée générale : Considérons un modèle décomposé en sous-domaines reliés par une interface. À l'intérieur de chaque sous-domaine, le comportement suit les lois de l'élasticité linéaire, tandis que l'interface peut présenter un comportement non-linéaire. Dans ce cadre, la méthode LaTIn [8, 7] repose sur deux principes fondamentaux.

Tout d'abord, le problème (et donc les équations) est scindé en deux groupes : d'une part les équations locales non-linéaires décrivant le comportement de l'interface, et d'autre part les équations globales linéaires relatives aux sous-domaines. On définit ainsi deux espaces de solutions : l'espace \mathcal{A} , correspondant aux solutions vérifiant l'équilibre des sous-domaines (espace linéaire), et l'espace \mathcal{L} , correspondant aux solutions respectant le comportement de l'interface.

Ensuite, un schéma itératif en deux étapes est mis en œuvre : une étape locale non-linéaire suivie d'une étape globale linéaire. Ce schéma est caractérisé par deux paramètres appelés directions de recherche : k^+ pour passer de \mathcal{A} à \mathcal{L} et k^- pour passer de \mathcal{L} à \mathcal{A} . À chaque itération, on effectue successivement les étapes suivantes (voir Fig. 2) :

- une étape locale où, à partir d'une solution connue $S^{(n)} \in \mathcal{A}$, on détermine une solution $\hat{S}^{(n)} \in \mathcal{L}$ suivant la direction k^+ ;
- une étape globale où, à partir de $\hat{S}^{(n)} \in \mathcal{L}$, on calcule une nouvelle solution $S^{(n+1)} \in \mathcal{A}$ suivant la direction k^- .

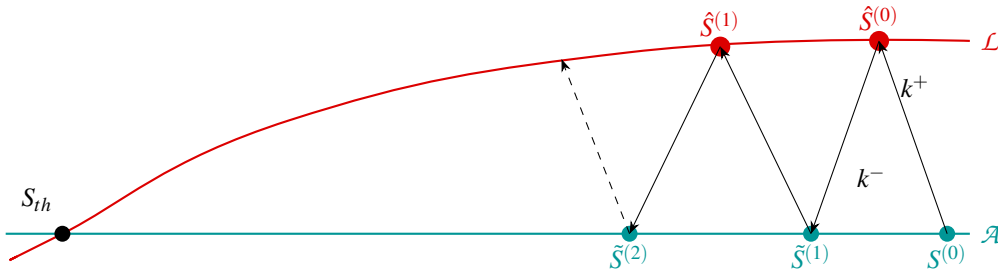


FIGURE 2 – Illustration des itérations opérées par la LaTIn.

Séparation du problème : L'algorithme de la LaTIn repose sur deux nouvelles quantités définies sur son interface Γ . On considère pour tout $i \in \{m, f\}$ w_i , la trace sur Γ du déplacement u_i et $\lambda_i = \sigma_i n_i$, la densité d'effort surfacique qui est appliquée sur Γ . De ce fait, les équations (1) deviennent les équations liées à \mathcal{A} :

$$\operatorname{div}(\sigma_i) + f_i^g = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \quad \forall i \in \{m, f\}, \quad (3a)$$

$$\sigma_i = C_i \varepsilon(u_i) \quad \text{dans } \Omega_i \quad \forall i \in \{m, f\}, \quad (3b)$$

$$\sigma_m n_m = F_m \quad \text{sur } \Gamma_{F_m}, \quad (3c)$$

$$u_m = u_m^d \quad \text{sur } \Gamma_{u_m}, \quad (3d)$$

$$\sigma_i n_i = \lambda_i \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3e)$$

$$w_i = u_i \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3f)$$

De la même manière, les équations (2) deviennent le problème local liée à \mathcal{L} , qui contient les solutions des équations non-linéaires définies sur l'interface Γ :

$$\hat{\lambda}_m + \hat{\lambda}_f = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4a)$$

$$g(\hat{w}_m, \hat{w}_f, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_f) = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4b)$$

Fermeture du problème : Afin de fermer le problème, on ajoute deux nouvelles équations liées aux directions de recherche :

$$k_i^+ : \hat{\lambda}_i - \lambda_i - k_i^+ (\hat{w}_i - w_i) \quad \text{sur } \Gamma \quad \forall i \in \{m, f\}, \quad (5a)$$

$$k_i^- : \hat{\lambda}_i - \lambda_i + k_i^- (\hat{w}_i - w_i) \quad \text{sur } \Gamma \quad \forall i \in \{m, f\}. \quad (5b)$$

On prendra dans la suite $k_i^+ = k_i^- = k_i \quad \forall i \in \{m, f\}$.

Enfin, on donne un indicateur de convergence de la méthode défini par :

$$\eta = \frac{\sum_{i \in \{m, f\}} \int_{\Gamma} [k_i (w_i^{(n)} - \hat{w}_i^{(n-1)})^2 + \frac{1}{k_i} (\lambda_i^{(n)} - \hat{\lambda}_i^{(n-1)})^2] d\Gamma}{\sum_{i \in \{m, f\}} \int_{\Gamma} [k_i (w_i^{(n)2} + \hat{w}_i^{(n-1)2}) + \frac{1}{k_i} (\lambda_i^{(n)2} + \hat{\lambda}_i^{(n-1)2})] d\Gamma}.$$

η nous permet de quantifier, pour une itération n donnée, la distance entre les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{L} .

3.2 Difficultés engendrées

Toutefois, la méthode LaTin opère en général sur des maillages conformes à l'interface, ce qui n'est pas le cas dans les méthodes de domaine fictif puisque que les éléments sont coupés. L'objectif de ces travaux est de développer ce type d'algorithme sur des maillages non-conformes à l'interface (voir Fig. 3). L'idée est donc de supprimer la surcouche conforme utilisée dans [5]. Cependant, la non-conformité du maillage peut engendrer des oscillations au niveau de l'interface. Pour pallier ce problème, nous nous inspirons des approches CutFEM/LaTin, qui requièrent l'ajout d'un terme de stabilisation [3].

De plus, pour des raisons d'efficacité, nous comptons utiliser la dualité FEniCSx¹/QUGaR² afin de gérer l'assemblage des opérateurs et la résolution du système linéaire (par FEniCSx) et la partie domaine fictif (intégration sur éléments coupés, quadrature efficace sur bord immergé) par QUGaR.

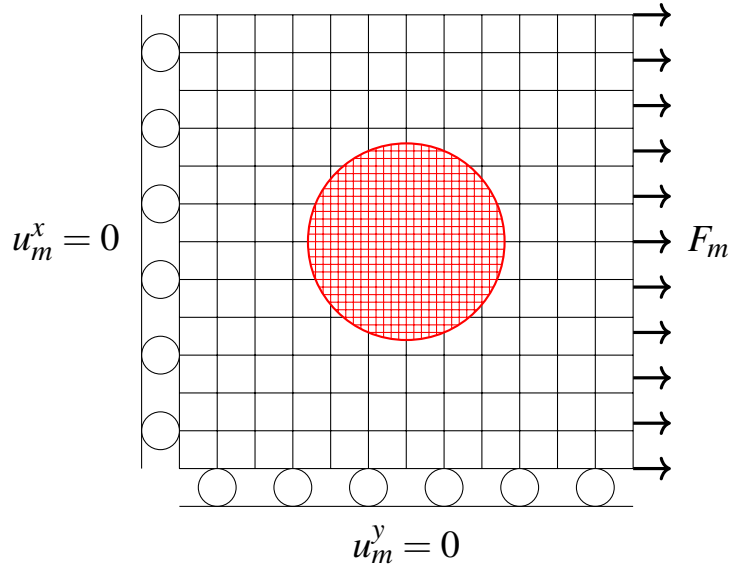


FIGURE 3 – Illustration du problème ciblé : en noir la grille utilisée pour la matrice et en rouge celle de la fibre. On applique une force de traction F_m sur le bord droit, avec des conditions aux bords de type *roller* sur le bord gauche et du bas.

1. <https://fenicsproject.org/>
2. <https://github.com/pantolin/qugar>

4 Résultats numériques

4.1 Cisaillement

Dans un premier temps, on montre un résultat de convergence sur un cas de poutre en cisaillement (voir Fig.4). La poutre est soumise à une force \mathbf{F} sur son bord droit. Pour plus de détail concernant ce cas, se référer aux articles [2, 10].

On a séparé la poutre en deux domaines Ω_1 et Ω_2 de tel sorte que l'interface Γ soit courbée. Comme il s'agit de la même poutre l'interface est considérée comme parfaite. Ainsi les deux domaines seront immergés dans un domaine rectangulaire (fictif) muni d'un maillage cartésien (voir Fig. 5).

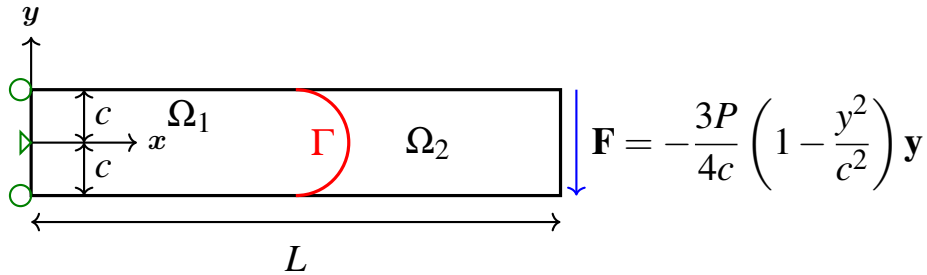


FIGURE 4 – Cas du cisaillement : une poutre de dimension $L \times 2c$ soumise à \mathbf{F} sur le bord droit.

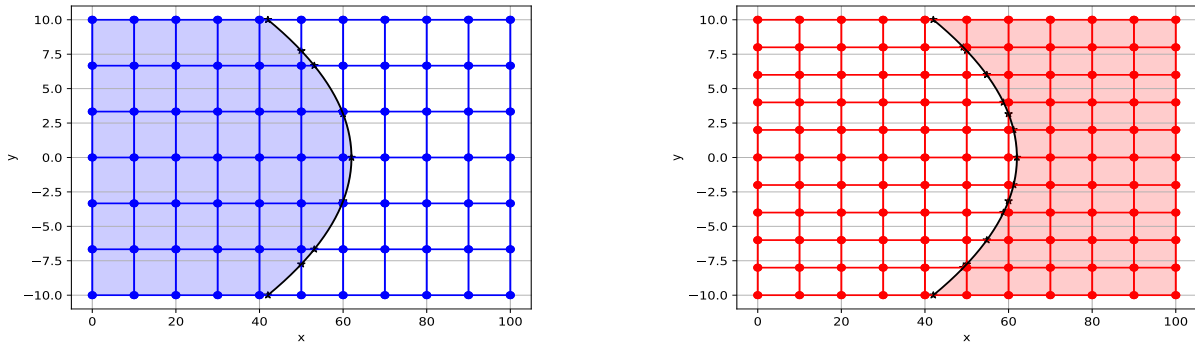


FIGURE 5 – Différents maillages utilisés : une grille cartésienne de 10×6 associée à Ω_1 et une de 10×10 associée à Ω_2 .

On a affiché la norme du déplacement (voir Fig. 6) et la contrainte de Von Mises (voir Fig. 7) pour un module de Young $E = 1000$ MPa, un coefficient de Poisson $\nu = 0.25$, $L = 100$ mm, $c = 10$ mm et $P = 80$ N. On observe une bonne continuité à l'interface de la norme du déplacement et de la contrainte de Von Mises. Sur ce cas, on connaît aussi l'énergie de déformation interne théorique $U_{ref} = 3296$ mJ [10]. On peut donc faire une étude de convergence de cette méthode. On a calculé l'erreur relative $E_r = \frac{|U - U_{ref}|}{U_{ref}}$ de cette énergie pour différents maillages (voir Table 1).

On a peçoit deux éléments sur le résultat obtenu (voir Fig. 8) :

- en rouge, la courbe de référence, calculée sur un domaine unique (1 patch) sans couplage (IGA pur avec $p = 2$) à partir des maillages de la première colonne de la Table 1 ;
- en bleu, les points obtenus à l'aide de la méthode LaTIn avec une interface courbée.

On obtient des pentes similaires, mais la méthode LaTIn semble donner de meilleurs résultats en apparence. Cela s'explique par le fait que les éléments coupés ne sont pas comptabilisés comme de véritables éléments. En réalité, les points issus de la LaTIn devraient être légèrement décalés vers la droite.

4.2 Cas de la plaque (Fig. 3) : contact unilatéral

On s'intéresse maintenant au problème présenté dans la section 2, où la matrice et la fibre interagissent selon une loi de contact unilatéral. On a affiché les contraintes obtenues lorsque Ω_m et Ω_f étaient immergés dans un maillage cartésien de 128×128 mailles (voir Fig. 9). La contrainte semble bien nulle

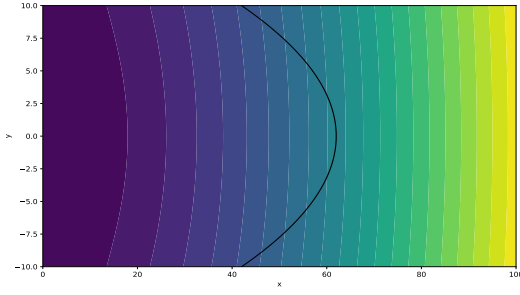


FIGURE 6 – Norme du déplacement.

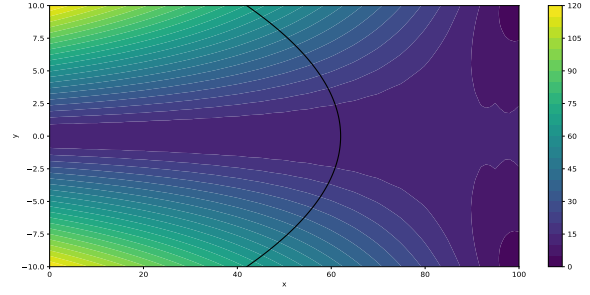


FIGURE 7 – Contrainte de Von Mises.

Nombre d'éléments (N^{el})	1 patch	2 patchs avec interface courbée
40 ($= N_1^{el}$)	10×4	$10 \times 6 \cup 10 \times 10$
80	20×8	$20 \times 12 \cup 20 \times 20$
160	40×16	$40 \times 24 \cup 40 \times 40$
280	80×32	$80 \times 48 \cup 80 \times 80$

TABLE 1 – Tailles des maillages utilisés. Sur la dernière colonne, le premier maillage est associé à Ω_1 et le deuxième à Ω_2 .

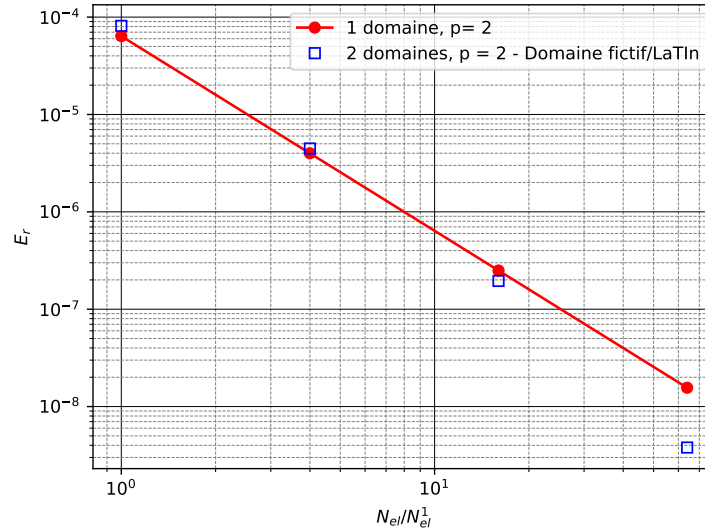


FIGURE 8 – Graphe des courbes de convergence. En rouge, l'erreur de référence : calculée avec un patch IGA (degré des splines $p = 2$). En bleu, les résultats obtenus avec la méthode présentée (LaTin et IGA avec $p = 2$).

lorsque la plaque se décolle de l'inclusion. On observe aussi une certaine continuité de σ_{yy} au niveau du contact inférieur et supérieur de l'interface. On montre aussi la convergence de la méthode LaTin pour plusieurs tailles de maillage (voir Fig. 10). La vitesse de convergence ne semble pas dépendre de la taille du maillage jusqu'à $\eta = 10^{-6}$.

Enfin, Fig. 11 montre le statut des points d'intégrations, si il y a (ou pas) contact entre la matrice et la fibre. On aperçoit bien que la plaque se décolle sur les extrémités droite et gauche de l'interface alors qu'elle reste en contact sur les parties inférieure et supérieure.

5 Conclusion

Nous avons présenté une approche LaTin, inspirée des méthodes CutFEM/LaTin [3] introduisant un terme de stabilisation adapté aux maillages non conformes. Nous avons étendu l'approche proposée à de l'IGA sur des maillages cartésien. L'analyse théorique et la calibration précise de ce terme de stabilisa-

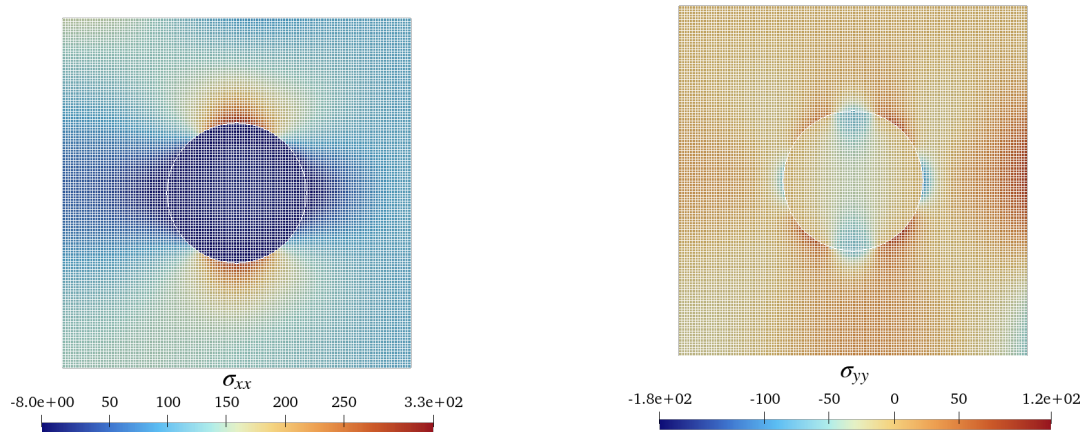


FIGURE 9 – Différentes contraintes pour une plaque unitaire dotée d’une inclusion de rayon 0.2 mm. Avec comme module de Young $E_m = E_f = 100$ MPa et un coefficient de poisson $\nu = 0.3$. On prend $F_m = 100$ MPa pour la force de traction. Les grilles cartésiennes utilisées pour la matrice et la fibre sont chacune pourvues de 128×128 mailles.

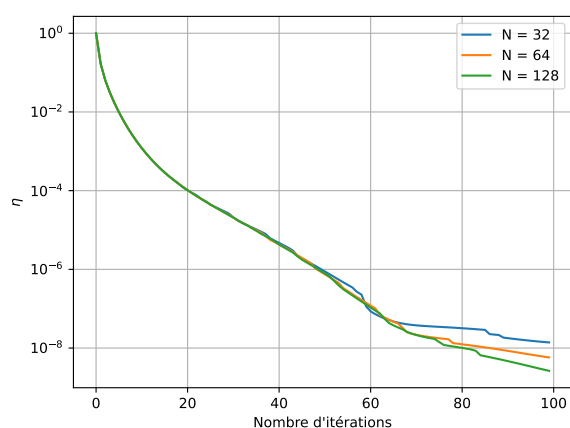


FIGURE 10 – Convergence de la méthode LaTin pour différentes tailles de maillage (32×32 , 64×64 et 128×128).

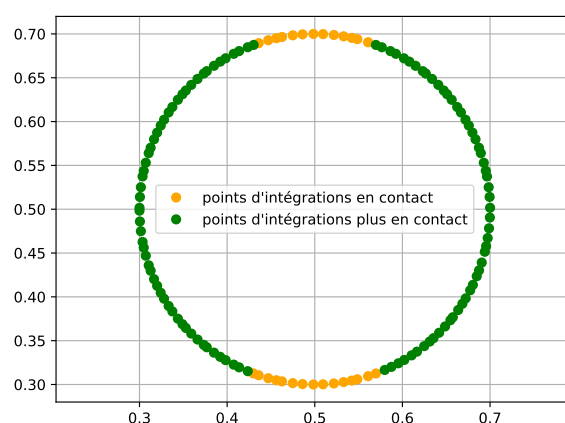


FIGURE 11 – Statut des points d’intégrations présents sur l’interface.

tion feront l’objet de travaux futurs.

Par ailleurs, d’autres développements sont également à prévoir, par exemple, seront présentés des résultats obtenus avec une plaque comprenant de multiples inclusions. Nous présenterons aussi des études d’extensibilité et de performance.

Références

- [1] R. Bouclier and T. Hirschler. *IGA : Non-conforming Coupling and Shape Optimization of Complex Multi-patch Structures, Volume 1*. John Wiley & Sons, 2022.
- [2] R. Bouclier, J.C. Passieux, and M. Salaün. Development of a new, more regular, mortar method for the coupling of nurbs subdomains within a nurbs patch : Application to a non-intrusive local enrichment of nurbs patches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316 :123–150, 2017.
- [3] S. Claus and P. Kerfriden. A stable and optimally convergent latin-cutfem algorithm for multiple unilateral contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018.
- [4] J.A. Cottrell, T. Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.

- [5] E. Lapina, P. Oumaziz, and R. Bouclier. Immersed boundary-conformal isogeometric latin method for multiple non-linear interfaces. *Engineering with Computers*, pages 1–22, 2024.
- [6] G. Legrain. A NURBS enhanced extended finite element approach for unfitted CAD analysis. *Computational Mechanics*, 52(4) :913–929, 2013.
- [7] P. Oumaziz, P. Gosselet, P.A. Boucard, and M. Abbas. A parallel noninvasive multiscale strategy for a mixed domain decomposition method with frictional contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(8) :893–912, 2018.
- [8] P. Oumaziz, P. Gosselet, P.A. Boucard, and S. Guinard. A non-invasive implementation of a mixed domain decomposition method for frictional contact problems. *Computational Mechanics*, 60 :797–812, 2017.
- [9] D. Schillinger and M. Ruess. The finite cell method : A review in the context of higher-order structural analysis of cad and image-based geometric models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 22(3) :391–455, 2014.
- [10] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method—The Basis*, volume 1. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 6th edition, 2005.