

# Élément volumique hexaédrique à 32 nœuds pour les structures en bois multicouches assemblées par des goujons

J. Paroissien<sup>1,2</sup>, M. Oudjene<sup>1</sup>, P. Lardeur<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Civil et de Génie des Eaux, Faculté des Sciences et de Génie, Université Laval, Québec (QC), Canada, [jeanne.paroissien.1@ulaval.ca](mailto:jeanne.paroissien.1@ulaval.ca), [marc.oudjene@gci.ulaval.ca](mailto:marc.oudjene@gci.ulaval.ca)

<sup>2</sup> Laboratoire Roberval (mécanique, énergie et électricité), Université de Technologie de Compiègne, Centre de recherche de Royallieu, CS 60319, Compiègne, France, [jeanne.paroissien@utc.fr](mailto:jeanne.paroissien@utc.fr), [pascal.lardeur@utc.fr](mailto:pascal.lardeur@utc.fr)

**Résumé** — Le développement de modèles numériques performants pour les structures en bois multicouches assemblées par des goujons en bois densifié reste un défi. Cet article propose une méthodologie fondée sur un élément fini volumique hexaédrique à 32 nœuds pour modéliser ce type de structure. Cet élément d'ordre supérieur est appliqué pour la première fois à une structure de taille industrielle : une poutre multicouche en bois. Les performances de l'élément sont comparées à celles d'éléments standards d'Abaqus à 8 et 20 nœuds. Les résultats démontrent clairement que l'élément fini à 32 nœuds mène à de meilleures performances avec des maillages relativement grossiers.

**Mots clefs** — Modélisation par éléments finis, Élément hexaédrique à 32 nœuds, Structures multicouches sans colle.

## 1. Introduction

Le bois est un matériau renouvelable qui présente de nombreux avantages environnementaux. Il capte et stocke le carbone tout au long du cycle de vie des bâtiments et génère beaucoup moins d'émissions de CO<sub>2</sub> que les matériaux traditionnels tels que le béton ou l'acier [1, 2]. Les structures en bois multicouches assemblées par goujons n'utilisent pas de colle synthétique, elles améliorent la qualité de l'air intérieur et facilitent le recyclage [3]. Parmi ces structures, les poutres multicouches sont largement utilisées comme éléments porteurs, cependant leur comportement mécanique est complexe et présente une grande variabilité, comme l'ont démontré Bui et al. [4, 5] lors d'études expérimentales et numériques.

La modélisation numérique de ces structures est plus délicate que pour les structures collées, en raison de la géométrie des goujons et des interactions entre les goujons et les lamelles. Pour développer des modèles volumiques prédictifs, capables de représenter fidèlement la géométrie et les connexions entre les différents composants, la méthodologie de Vérification et Validation (V&V) [6, 7] est utilisée. Une étude numérique approfondie des structures en bois multicouches a démontré la présence de champs de déplacement cubiques dans l'épaisseur des lamelles et dans les sections des goujons [8]. Néanmoins, des concentrations de contraintes voire des singularités sont observées dans des zones très localisées, à proximité des goujons, aux interfaces entre les lamelles. Notre objectif est d'utiliser, dans les zones où cela est possible, un seul élément dans l'épaisseur d'une lamelle et dans la section d'un goujon.

Les éléments volumiques hexaédriques sont particulièrement adaptés à la géométrie complexe des goujons et des lamelles. Les éléments à 8 nœuds, ainsi que les éléments d'ordre supérieur à 20 ou 27 nœuds, ont été largement utilisés dans la littérature [9]. Des éléments encore plus riches (32, 64 ou 96 nœuds) permettent de représenter des champs de déplacement au minimum cubiques, mais leur utilisation reste majoritairement académique et aucune application industrielle d'un élément à 32 nœuds n'a été rapportée à ce jour [10-12].

La présente étude propose un élément hexaédrique à 32 nœuds capable de représenter précisément des champs de déplacement cubiques. Cet élément est implémenté dans Abaqus via un sous-programme utilisateur (UEL). Le paragraphe 2 décrit la formulation de l'élément. Le paragraphe 3 présente le modèle de poutre en bois multicouche assemblée par des goujons. Le modèle avec l'élément à 32 nœuds

est comparé à ceux utilisant des éléments standards à 20 nœuds et aux résultats expérimentaux, conformément à la méthodologie V&V. Enfin, le paragraphe 4 présente une conclusion et des perspectives.

## 2. Élément hexaédrique à 32 nœuds

Pour représenter correctement les déplacements cubiques à travers l'épaisseur d'une lamelle et dans la section d'un goujon on pourrait utiliser des éléments associés à des théories de poutre ou de coque d'ordre supérieur. Ce type d'élément n'est pas disponible dans les logiciels commerciaux, tels qu'Abaqus. De plus, la modélisation des zones singulières nécessite un élément volumique. Des approches hybrides volume-coque et volume-poutre d'ordre supérieur ont été testées [13] et présentent de bonnes performances globales, mais de petites erreurs locales subsistent. Pour disposer d'une méthode plus générale, un élément volumique hexaédrique incorporant tous les termes de la base cubique est proposé et implémenté dans Abaqus via un sous-programme utilisateur (UEL).

### 2.1. Description de l'élément à 32 nœuds

L'élément hexaédrique à 32 nœuds comprend huit nœuds aux sommets et deux nœuds supplémentaires par arête. La Figure 1 présente l'élément de référence.

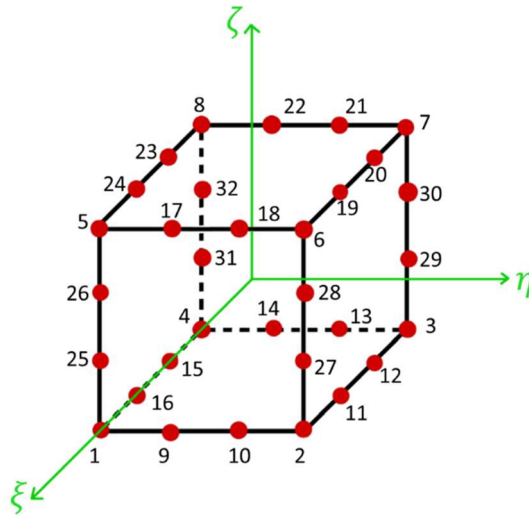


Figure 1. Numérotation et position des nœuds de l'élément hexaédrique à 32 nœuds.

La base polynomiale  $\langle P \rangle$ , adaptée à cet élément de référence et contenant les 32 termes de la base cubique, est définie de la manière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\zeta & \xi\eta & \eta\zeta & \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \\ \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^2\zeta & \eta\zeta^2 & \xi^2\zeta & \xi\zeta^2 & \xi\eta\zeta & \xi^3 & \eta^3 & \zeta^3 \\ \xi^3\eta & \xi\eta^3 & \eta^3\zeta & \eta\zeta^3 & \xi^3\zeta & \xi\zeta^3 & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta & \xi\eta\zeta^2 & \xi^3\eta\zeta \\ & & & & \xi\eta^3\zeta & \xi\eta\zeta^3 & & & & \end{pmatrix}^T \quad (1)$$

Les fonctions de forme  $N_1$  à  $N_{32}$  sont données dans le Tableau 1.

Tableau 1. Fonctions de forme de l'élément de référence hexaédrique à 32 nœuds.

Catégorie de nœuds	Nœuds concernés	Fonctions de forme associées
Sommets	1 à 8	$N_i = (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(9\xi^2 + 9\eta^2 + 9\zeta^2 - 19)/64$
Arêtes parallèles à l'axe $\xi$	11, 12, 16, 15, 19, 20, 23, 24	$N_i = 9(1 - \xi^2)(1 + 9\xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)/64$
Arêtes parallèles à l'axe $\eta$	9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22	$N_i = 9(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)/64$
Arêtes parallèles à l'axe $\zeta$	25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32	$N_i = 9(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2)(1 + 9\zeta\zeta_i)/64$

L'objectif est de réaliser des analyses linéaires statiques et des analyses modales. Pour cela, la matrice de raideur [K] et la matrice de masse [M] doivent être formulées. Les sous-paragraphes suivants décrivent leur construction.

## 2.2. Matrice de raideur de l'élément hexaédrique à 32 nœuds

Dans le cadre d'analyses statiques ou vibratoires, la matrice de raideur [K] est définie par une intégrale sur le domaine de l'élément de référence  $\Omega_e$  :

$$[K] = \int_{\Omega_e} [B]^T [H] [B] \det[J] d\Omega \quad (2)$$

où [B] est l'opérateur de déformation, [J] la matrice jacobienne et [H] la matrice d'élasticité.

L'intégration numérique de cette matrice est réalisée à l'aide de schémas de Gauss. Chaque point d'intégration possède un poids associé. La matrice [K] devient alors :

$$[K] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_i \omega_j \omega_k [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [H] [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \det[J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \quad (3)$$

Pour l'élément à 32 nœuds, un schéma d'intégration  $4 \times 4 \times 4$  (soit 64 points d'intégration) est nécessaire pour une intégration complète de [K]. Un schéma d'intégration réduit  $3 \times 3 \times 3$  (27 points) peut également être employé sans engendrer de modes parasites. Ainsi, deux variantes de l'élément sont définies, H32 (intégration complète  $4 \times 4 \times 4$ ) et H32R (intégration réduite  $3 \times 3 \times 3$ ).

## 2.3. Matrice de masse de l'élément hexaédrique à 32 nœuds

Dans l'analyse vibratoire des structures en bois multicouches, on utilise la matrice de masse cohérente [M], définie par :

$$[M] = \int_{\Omega_e} \rho [N]^T [N] \det[J] d\Omega \quad (4)$$

où  $\rho$  représente la masse volumique et [N] la matrice des fonctions de forme.

En appliquant le même principe d'intégration numérique que précédemment, la matrice de masse s'écrit :

$$[M] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho \omega_i \omega_j \omega_k [N(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [N(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \det[J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \quad (5)$$

Un schéma d'intégration  $4 \times 4 \times 4$  est nécessaire pour une intégration complète de la matrice de masse [M].

## 3. Exemple : poutre en bois multicouche

### 3.1. Caractéristiques principales et hypothèses

Les modèles éléments finis de poutres multicouches en bois assemblées par des goujons en bois densifié ont été décrits par Bui et al. [4, 5] et Paroissien et al. [13]. Les principales hypothèses et caractéristiques sont rappelées ici. Une analyse modale numérique en conditions libre-libre est réalisée avec Abaqus sur une poutre composée de trois lamelles de chêne assemblées par 27 goujons en épicéa densifié. Les lamelles mesurent  $1450 \times 70 \times 22,5$  mm et les goujons ont une section de rayon égal à 8 mm et une longueur de 67,5 mm (Figure 2).

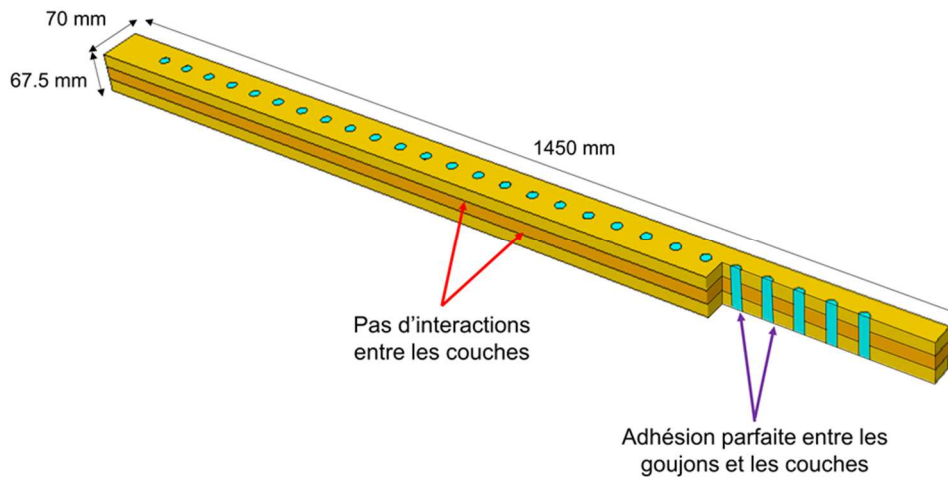


Figure 2. Géométrie et hypothèses de modélisation pour la poutre en bois multicouche.

Le comportement mécanique des poutres multicouches présente une forte variabilité due au matériau bois et au processus aux processus de fabrication et d'assemblage. Cette étude se concentre sur le comportement moyen, en utilisant les valeurs moyennes des propriétés physiques et mécaniques. La densité et le taux d'humidité (9 %) proviennent des mesures effectuées sur 16 lamelles [4], le module d'Young longitudinal du chêne est déterminé à partir de tests expérimentaux, les autres propriétés élastiques sont obtenues en exploitant les relations empiriques de Jodin [14]. Pour les goujons en épicéa densifié, les propriétés orthotropes sont tirées des résultats de Bouhala et al. [15]. Les propriétés utilisées sont résumées dans le Tableau 2.

Tableau 2. Propriétés physiques et élastiques orthotropes de la poutre en bois multicouche.

	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$E_L$ (MPa)	$E_T$ (MPa)	$E_R$ (MPa)	$G_{LT}$ (MPa)	$G_{LR}$ (MPa)	$G_{TR}$ (MPa)	$\nu_{LT}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{TR}$
<b>Chêne [4,14]</b>	624	11 380	1 045	1 871	977	1 275	361	0.40	0.32	0.43
<b>Epicéa densifié [15]</b>	1200	26 000	1 033	1 082	800	800	100	0.41	0.41	0.37

Pour assurer la cohérence physique du modèle, plusieurs hypothèses issues d'observations expérimentales [4] sont adoptées. De petits interstices entre les lamelles sont présents, de sorte que le modèle n'inclut pas d'interactions entre les lamelles (Figure 2). Les goujons en bois densifié se dilatent après insertion, sous l'effet du comportement mécanosorptif, comblant ainsi les jeux initiaux d'assemblage. Les lamelles et les goujons sont maillés séparément, avec des nœuds coïncidents mais distincts, reliés par une des relations MPC (*Multi Point Constraint*) de type TIE (Abaqus [16]). Ces hypothèses permettent une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux [13].

### 3.2. Étape de vérification

La convergence des six premières fréquences non nulles est étudiée. Le maillage convergé est obtenu en réduisant la taille des éléments jusqu'à ce qu'une erreur inférieure à 1 % soit atteinte pour toutes les fréquences propres par rapport à une solution de référence. Les valeurs de référence sont obtenues à l'aide de l'élément concerné et avec un maillage très fin (comportant plusieurs millions de degrés de liberté). La comparaison des performances entre les éléments H32, H32R, C3D20, C3D20R et C3D8 est présentée en termes de nombre de degrés de liberté et de nombre d'éléments. Dans le cadre de cette étude, nous avons montré que le nombre de degrés de liberté constitue le critère le plus pertinent.

La Figure 3 montre les résultats de l'étude de convergence avec les modèles constitués des éléments H32, H32R, C3D20, C3D20R ou C3D8. La Figure 4 présente les déformées modales correspondantes.

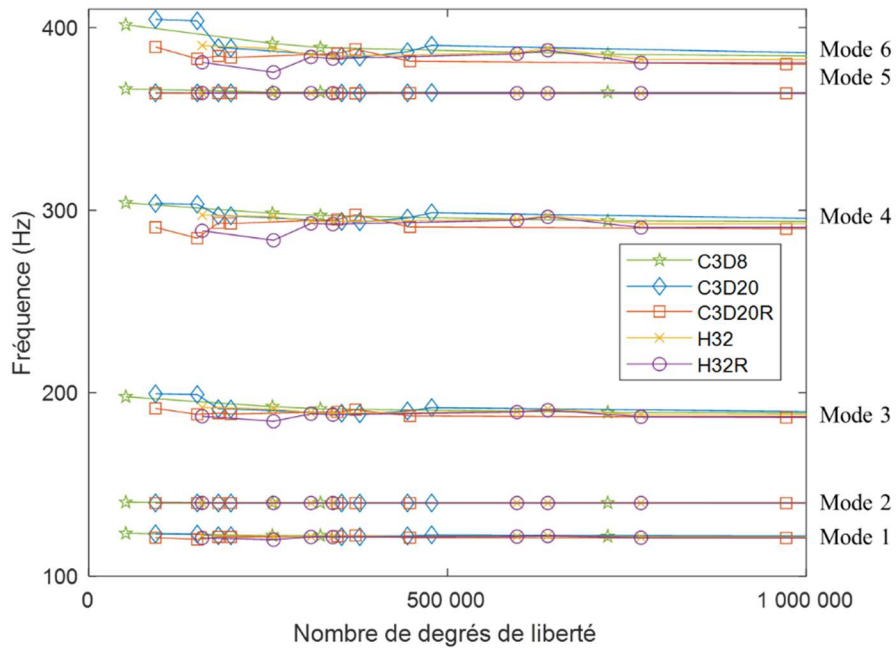


Figure 3. Convergence des fréquences propres pour la poutre en bois multicouche.

Le Tableau 3 décrit les modèles ayant satisfait le critère de convergence. Les deux modèles utilisant l'élément à 32 nœuds convergent plus rapidement que le modèle avec l'élément C3D20R, lui-même plus performant que le modèle avec l'élément C3D20. D'autres applications ont démontré une meilleure performance systématique des éléments à 32 nœuds par rapport aux éléments C3D20 et C3D20R, bien que ce dernier soit déjà très efficace. L'élément C3D8 présente le plus faible taux de convergence. La Figure 5 illustre les maillages convergés pour chaque type d'élément.

Tableau 3. Description des modèles convergés pour la poutre en bois multicouche

Élément	C3D8	C3D20	C3D20R	H32	H32R
Nombre de degrés de liberté	2615724	1705023	972117	769725	769725
Nombre d'éléments	741780	112488	56244	25104	25104

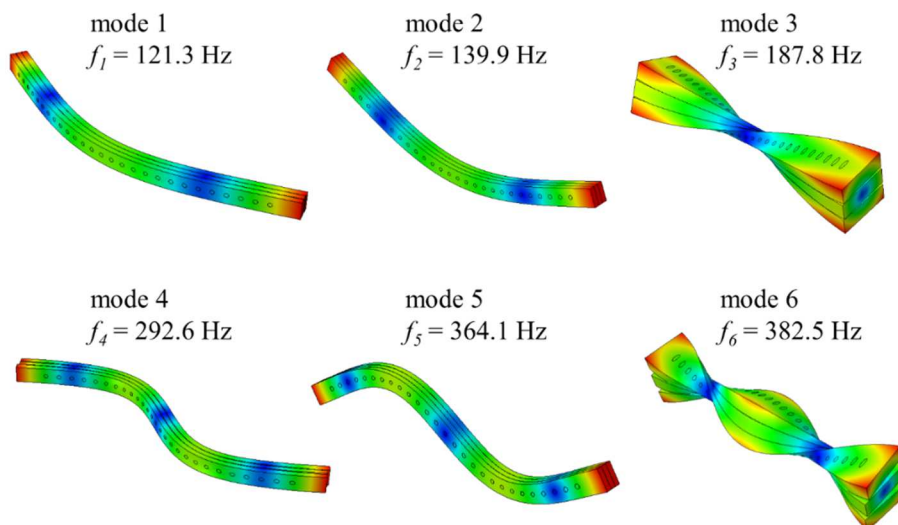


Figure 4. Déformées modales numériques obtenues à l'aide du modèle convergé avec l'élément H32.

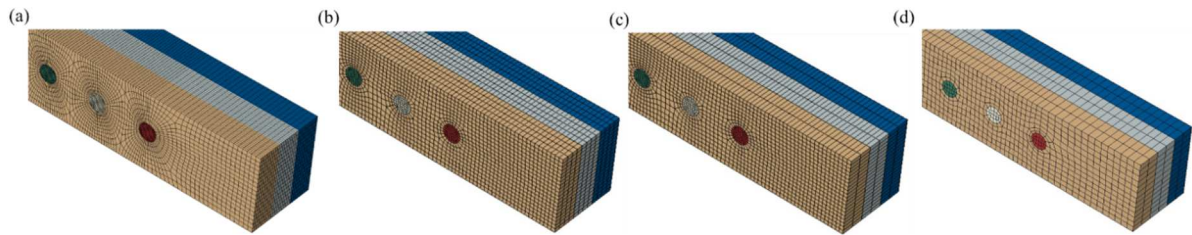


Figure 5. Maillages convergés de la poutre en bois multicouche.

(a) C3D8. (b) C3D20. (c) C3D20R. (d) H32 et H32R.

Un élément à 32 nœuds permet de reproduire avec précision les champs de déplacement cubiques observés dans les goujons et les lamelles. Cependant, des zones singulières évoquées dans le paragraphe 1 nécessitent un maillage plus fin. Ainsi, même avec cet élément, deux éléments sont requis suivant l'épaisseur des lamelles dans ces zones. Dans cette étude, pour simplifier le maillage, ce nombre d'éléments suivant l'épaisseur est conservé dans toute la structure.

### 3.3. Étape de validation

La validation compare les résultats numériques aux données expérimentales de Bui et al. [4] sur des poutres multicouches assemblées par des goujons en conditions libre-libre. Seuls les modes de flexion dans un plan sont considérés expérimentalement. L'écart entre les fréquences numériques et expérimentales (Tableau 4) reste inférieur à 4 %, et les déformées modales numériques correspondent aux déformées observées expérimentalement (Figure 4), confirmant les performances de l'élément à 32 nœuds et la validité des hypothèses mécaniques. Le tableau 4 fournit aussi le niveau de variabilité expérimentale des fréquences propres. Le niveau de variabilité est significatif et sa prise en compte constitue une des perspectives de cette étude.

Tableau 4. Comparaison des fréquences propres numériques et expérimentales moyennes pour la poutre en bois multicouche.

	Fréquence expérimentale [4]		H32		H32R	
	Moyenne	CoV	Fréquence	Différence	Fréquence	Différence
$f_1$	118.2 Hz	6.0 %	121.3 Hz	2.6 %	121.0 Hz	2.4 %
$f_4$	281.0 Hz	5.3 %	292.6 Hz	4.1 %	290.6 Hz	3.4 %

## 4. Conclusion et perspectives

Cette étude vise à développer des modèles numériques performants pour la simulation de structures en bois multicouches, en utilisant la méthode de Vérification et Validation (V&V), garantissant à la fois une bonne précision numérique et une réduction des temps de calcul. Un élément volumique hexaédrique à 32 nœuds d'ordre supérieur a été développé et appliqué à une poutre en bois multicouche assemblée par des goujons en bois densifié, constituant la première application de taille industrielle connue de ce type d'élément. L'élément à 32 nœuds s'est révélé plus efficace que les formulations classiques à 20 nœuds : il reproduit avec précision les champs de déplacement complexes tout en nécessitant moins d'éléments, réduisant ainsi le coût de calcul. Cette approche offre une nouvelle approche de modélisation pour les structures industrielles complexes et s'inscrit dans une démarche de sobriété numérique. Les résultats expérimentaux et numériques présentent une bonne concordance, confirmant la pertinence de la modélisation et la validité de l'élément à 32 nœuds pour les structures multicouches assemblées par des goujons.

Enfin, les perspectives incluent l'extension de la formulation à des analyses statiques linéaires et non linéaires, la prise en compte de la variabilité, et l'application élargie de ces éléments d'ordre

supérieur à d'autres structures académiques et industrielles dans une optique de modélisation numérique durable.

## Remerciements

Les auteurs remercient la Région Hauts-de-France et le conseil de recherches en sciences naturelles et génie du Canada pour le cofinancement de ce travail.

## Références

- [1] A. Himes, G. Busby. Wood buildings as a climate solution. *Developments in the Built Environment*, 2020.
- [2] D. Dzhurko, B. Haacke, A. Haberbosch, L Köhne, N. König, F. Lode, et al. Future buildings as carbon sinks: Comparative analysis of timber-based building typologies regarding their carbon emissions and storage. *Frontiers in Built Environment*, 2024.
- [3] A. Sotayo, D. Bradley, M. Bather, P. Sareh, M. Oudjene, I. El-Houjeyri, et al. Review of state of the art of dowel laminated timber members and densified wood materials as sustainable engineered wood products for construction and building applications. *Developments in the Built Environment*, 2020.
- [4] T.A. Bui, M. Oudjene, P. Lardeur, M. Khelifa, Y. Rogaume. Towards experimental and numerical assessment of the vibrational serviceability comfort of adhesive free laminated timber beams and CLT panels assembled using compressed wood dowels. *Engineering Structures*, 2020.
- [5] T.A. Bui, P. Lardeur, M. Oudjene, J. Park. Numerical modelling of the variability of the vibration frequencies of multi-layered timber structures using the modal stability procedure. *Composite Structures*, 2022.
- [6] P. Roache. *Verification and validation in computational science and engineering*. vol. 895. Hermosa Pub. 1998.
- [7] P. Lardeur, R. Scigliano, M. Scionti. Verification and validation for the vibration study of automotive structures modelled by finite elements. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2013.
- [8] J. Paroissien. Développement de modèles éléments finis de types volumique, volume-coque et volume-poutre pour l'analyse du comportement des structures multicouches en bois assemblées par des goujons. Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne (France) ; Université Laval (Québec, Canada), 2025.
- [9] K.T. Danielson, J.L. O'Daniel. Reliable second-order hexahedral elements for explicit methods in nonlinear solid dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011.
- [10] D. Arnold, G. Awanou. Finite element differential forms on cubical meshes. *Mathematics of Computation*, 2013.
- [11] A. Karpik, F. Cosco, D. Mundo. Higher-order hexahedral finite elements for structural dynamics: a comparative review. *Machines*, 2023.
- [12] A. Karpik, F. Cosco, D. Mundo. Dynamic error estimation in higher-order finite elements. *Designs*, 2024.
- [13] J. Paroissien, M. Oudjene, P. Lardeur. Verification and Validation of finite element models for laminated timber structures using solid, solid-beam and solid-shell approaches. *Composite Structures*, 2024.
- [14] P. Jodin. *Le bois, matériau d'ingénierie*. Nancy: Association pour la recherche sur le bois en Lorraine; 1994.
- [15] L. Bouhala, D. Fiorelli, A. Makradi, S. Belouettar, A. Sotayo, D.F. Bradley, et al. Advanced numerical investigation on adhesive free timber structures. *Composite Structures*, 2020.
- [16] Abaqus 2023 Documentation. Dassault Systèmes Simulia Corp.