

# Optimisation isogéométrique de forme de structures lattices

T. Hirschler<sup>1</sup>, M. Chasapi<sup>2</sup>, P. Antolin<sup>3</sup>, A. Buffa<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> ICB, UMR6303 CNRS, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, Sévenans, France, {thibaut.hirschler}@utbm.fr

<sup>2</sup> Chair of Structural Analysis and Dynamics, RWTH Aachen University, Allemagne

<sup>3</sup> MATH-MNS, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

<sup>4</sup> IMATI, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Pavie, Italie

**Résumé** — En combinant des techniques de réduction de modèles à des solveurs par décomposition de domaine, nous montrons comment il est possible d'effectuer des simulations numériques rapides de structures lattices, à l'échelle fine (sans faire appel à des approches multi-échelles). Plus encore, nous montrons comment ces modèles réduits et solveurs dédiés alors appliqués à des modèles isogéométriques permettent l'optimisation de forme de ces structures complexes tout en utilisant des ressources numériques limitées.

**Mots clés** — Analyse isogéométrique, Modèles d'ordre réduit, Décomposition de domaine, Conception optimale, Solveur efficace.

## 1 Introduction

L'émergence des procédés de fabrication additive révolutionne la conception des structures mécaniques en proposant, par exemple, de considérer des formes plus complexes que celles réalisées par des procédés de fabrication plus conventionnels. En particulier, il en découle un intérêt croissant pour les structures où l'organisation de la matière est soigneusement choisie et organisée de sorte à atteindre des comportements mécaniques particuliers et des performances supérieures [2]. Nous nous intéressons ici au cas de structures décomposées en multitude de cellules élémentaires faites à partir d'agencement structuré de vide et de matière, couramment nommées *structures lattices* [1, 22].

Les approches standards en simulation numérique directement appliquées aux structures lattices sont généralement trop gourmandes. Il y a alors deux façons de réduire les ressources numériques demandées. La première classe de méthodes consiste à décrire le comportement de la structure aux deux échelles présentes : l'échelle microscopique associée à la cellule élémentaire et l'échelle macroscopique associée à la structure globale omettant la description explicite des détails microstructuraux. Citons notamment les approches par homogénéisation, éventuellement numérique, [3, 7, 16, 19] où le comportement macroscopique équivalent du matériau architecturé est utilisé à l'échelle macroscopique pour effectuer la simulation. Au-delà de réduire les coûts numériques, ces approches peuvent être également utilisées pour résoudre des problèmes de conception optimale de ces structures complexes [14, 20]. Cependant, au-delà de la contrainte d'avoir une séparation claire des échelles, les structures lattices peuvent exhiber des phénomènes locaux complexes qu'il peut être difficile à modéliser fidèlement par homogénéisation. Il semble alors préférable de faire appel à la seconde catégorie d'approches : il s'agit là de considérer les structures dans leur globalité (sans séparation des échelles *a priori*) et de faire appel à des méthodes numériques avancées permettant de construire et de résoudre les grands systèmes d'équations de manière efficace et économe [10, 13, 17]. Dans ce contexte, une sous-classe d'approches prometteuses consiste à coupler des modèles d'ordre réduit (ROM) à des approches par décomposition de domaine (DD) [4, 15, 21] et ces travaux s'inscrivent dans ce contexte.

Nous présentons notre approche de la manière suivante. La section 2 introduit la méthode employée pour construire des modèles isogéométriques de structures lattices. La section 3 décrit les idées utilisées pour rendre le calcul de structures moins gourmand en ressources numériques. Finalement, nous montrons en section 4 comment cette approche offre naturellement la possibilité de résoudre efficacement des problèmes d'optimisation de forme de ces structures complexes.

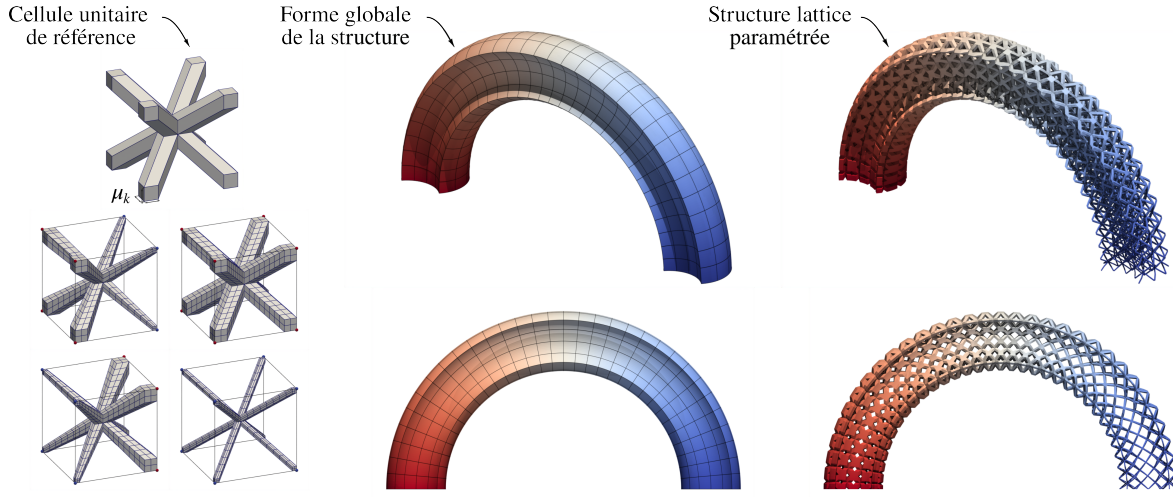


FIGURE 1 – Modèles isogéométriques paramétrés de structures lattices obtenus par composition. Le champ des couleurs représente un champ de “conception” distribuant les paramètres géométriques de manière continue dans l’espace.

## 2 Modèles splines paramétrés

Un ingrédient de base de l’approche proposée consiste à faire appel à des modèles géométriques dont la forme est paramétrée de manière compatible avec les besoins du point de vue “calcul de structures”. Une façon naturelle de s’y prendre est de construire un modèle géométrique compatible avec l’analyse, dit *modèle isogéométrique*, et d’introduire des paramètres géométriques aux points de contrôle des splines impliquées dans ce modèle.

Nous construisons ces modèles isogéométriques des structures lattices en suivant l’approche proposée par [5], et illustrée en Fig. 1. Cela implique la modélisation géométrique d’une ou plusieurs cellules élémentaires de référence par l’utilisation de patches B-spline ou NURBS. La forme globale de la structure finale est modélisée, dans un premier temps, sans tous les détails architecturaux, à l’aide de patches B-spline et NURBS également. Le modèle géométrique complet d’une structure lattice est finalement obtenu par composition (au sens mathématique du terme) de ces deux sous-modèles : cellules élémentaires de référence et forme globale de la structure. Ainsi, notre domaine physique définissant notre objet  $\Omega$  est une collection de cellules  $\Omega^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N_s$  obtenues par composition de mappings splines d’une cellule de référence  $C^{\text{ref}}$  et d’un élément de Bézier “macroscopique”  $M^{(s)}$ , soit

$$\Omega(\boldsymbol{\mu}) = \bigcup_{s=1}^{N_s} \Omega^{(s)}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}), \quad \text{avec} \quad \Omega^{(s)}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}) = (M^{(s)} \circ C^{\text{ref}})(\bar{\Omega}; \boldsymbol{\mu}^{(s)}).$$

Le tout est paramétré géométriquement via des variables de conception  $\boldsymbol{\mu}$ . Si l’on veut garantir une compatibilité étroite et simplifiée avec l’analyse, la discrétisation spline finale doit présenter des maillages conformes (pas de discontinuités aux interfaces entre patches splines). Cela peut être assuré par construction, en distribuant des paramètres géométriques à partir d’un champ continu défini sur la forme globale (voir champ de couleurs en figure 1).

## 3 Solveur ROM-DD

La quasi-périodicité intrinsèque des structures lattices permet une utilisation naturelle des méthodes par décomposition de domaine : le domaine global est naturellement décomposé en une collection de sous-domaines (les cellules) sans recouvrement. Plus intéressant encore, le comportement mécanique des différentes cellules est similaire de par leur ressemblance. Ces similarités peuvent être étudiées *a priori* et utilisées durant les évaluations de l’équilibre de la structure et des sensibilités aux paramètres géométriques.

### 3.1 Résolution par décomposition de domaine

En pratique, la méthode de décomposition de domaine employée dans ces travaux est la méthode FETI-DP, introduite par [6]. L'équilibre global de la structure est obtenu de manière itérative, où chaque itération consiste à écrire l'équilibre local de chacune des cellules sous l'imposition d'efforts d'interface et à déduire les sauts de déplacements entre les cellules. Le processus met à jour les efforts d'interface jusqu'à obtenir des sauts de déplacements nuls. Dans la pratique, cela revient à résoudre un *problème d'interface* de la forme

$$\mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{d}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{F}$  est appelé complément de Schur dual global,  $\boldsymbol{\lambda}$  est le vecteur contenant des multiplicateurs de Lagrange imposant fortement l'équilibre des efforts inter-cellules (troisième loi de Newton), et  $\mathbf{d}$  est le second membre du problème d'interface, résultat de la condensation statique sous-jacente (non écrite ici). Le résidu de ce problème d'interface  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{d}$  mesure les sauts en déplacement aux interfaces entre les cellules. À l'aide d'un gradient conjugué préconditionné, la méthode met à jour les multiplicateurs itérativement  $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^1, \dots, \boldsymbol{\lambda}^*$  jusqu'à obtenir un résidu en deçà d'une tolérance fixée  $\|\mathbf{r}(\boldsymbol{\lambda}^*)\| < \text{tol}$ .

L'emploi d'un solveur itératif n'est pas anodin. La construction explicite du complément de Schur global n'est pas nécessaire (ce qui serait excessivement coûteux) car uniquement des produits matrice-vecteur sont à effectuer. Sans donner l'expression complète du complément de Schur (et du second membre), un produit matrice-vecteur  $\mathbf{F}\boldsymbol{\lambda}$  implique la résolution d'un problème grossier construit à partir des DDL dits "primaux", et de nombreux problèmes d'équilibre locaux, définis sur chacune des cellules comme

$$\mathbf{K}_{rr}(\boldsymbol{\mu}^{(s)})\mathbf{u}_r^{(s)} = \mathbf{f}_r^{(s)} - \mathbf{K}_{rp}(\boldsymbol{\mu}^{(s)})\mathbf{A}_p^{(s)\top}\mathbf{u}_p - \mathbf{B}^{(s)\top}\boldsymbol{\lambda}, \quad \forall s = 1, \dots, N_s. \quad (2)$$

Ces problèmes locaux impliquent des déplacements imposés sur les DDL primaux (indices  $p$  local à la cellule et  $P$  global à la structure complète), et des efforts imposés sur les DDL duaux (via  $\mathbf{B}^{(s)\top}\boldsymbol{\lambda}$ ). Durant la résolution du problème d'interface, seuls les seconds membres de tous ces problèmes locaux changent. Il convient dans la pratique de construire les matrices de rigidité locales et de factoriser les sous-blocs  $\mathbf{K}_{rr}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}), s = 1, \dots, N_s$  associés aux DDL non-primaux, avant la résolution de Eq. (1), de sorte à faire "uniquement" des descentes-remontées durant les itérations. Sans rentrer dans plus de détails, la résolution à l'aide d'un solveur itératif (type gradient conjugué) de Eq. (1) implique un préconditionnement, où généralement une autre série de sous-problèmes doivent être résolus : à chaque itération, deux sous-problèmes par cellule sont donc à résoudre.

### 3.2 Modèles d'ordre réduit

Les similarités entre les cellules offrent une opportunité intéressante pour accélérer les calculs et réduire la consommation de mémoire vive. Il paraît opportun de construire des modèles d'ordre réduit des différentes quantités impliquées durant l'analyse structurelle et le calcul des sensibilités, de sorte à éviter les nombreuses factorisations ayant lieu dans l'approche DD usuelle. Dans ces travaux, nous faisons appel à des modèles d'ordre réduit construits par projection sur bases réduites et par des techniques d'hyper-réduction telles que la Méthode d'Interpolation Empirique (EIM). Ainsi, nous introduisons, par exemple, un modèle d'ordre réduit pour les matrices de rigidité locales suivant

$$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{M_K} \bar{\mathbf{K}}_i \alpha_i(\boldsymbol{\mu}^{(s)}),$$

où  $\bar{\mathbf{K}}_1, \dots, \bar{\mathbf{K}}_{M_K}$  forme une base réduite de taille  $M_K$ , et  $\alpha_1(\boldsymbol{\mu}^{(s)}), \dots, \alpha_{M_K}(\boldsymbol{\mu}^{(s)})$  sont les fonctions d'interpolation. La base réduite peut être obtenue classiquement par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), par exemple, appliquée sur des données générées a priori (i.e., les snapshots). Les fonctions d'interpolation  $\alpha_i$  sont formulées ici à l'aide de l'EIM : cela implique de calculer exactement, au minimum,  $M_K$  quantités impliquées dans l'opérateur que l'on cherche à approcher (ici  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\mu}^{(s)})$ ). Cela peut être  $M_K$  composantes bien choisies (les "magic indices") de la matrice, ou comme fait dans ces travaux,  $M_K$  évaluations en des points bien choisis (les "magic points") de la fonction tensorielle impliquée dans la formulation variationnelle (méthodes appelées M-DEIM et DEIM, respectivement [18]). Les détails sont volontairement omis ici mais le lecteur intéressé par ces techniques d'hyper-réduction peut se référer à [9, 18] par exemple.

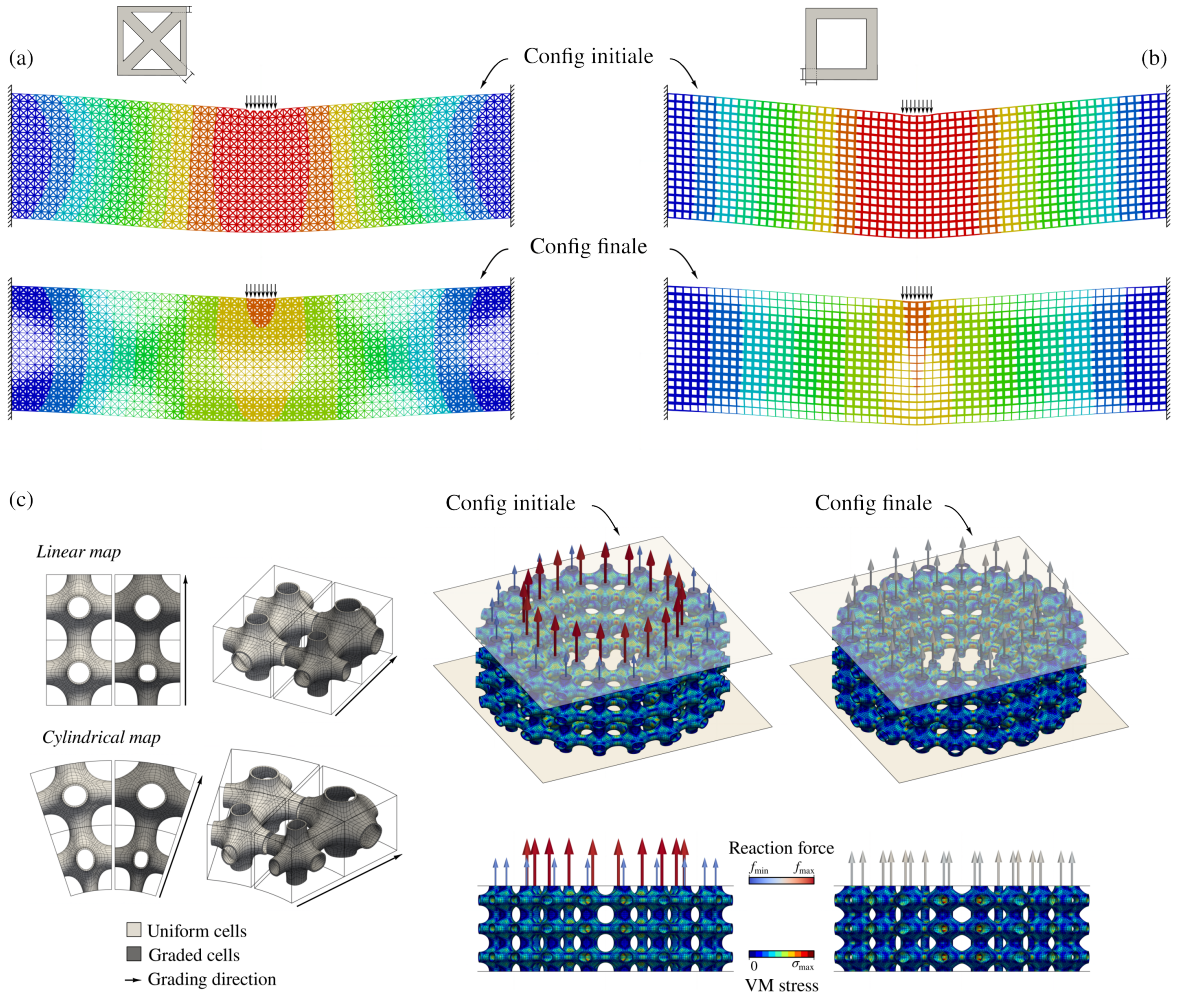


FIGURE 2 – Exemples de cas d’optimisation de forme de structures lattice.

Au-delà de la matrice de rigidité, nous construisons des modèles d’ordre réduit permettant de résoudre rapidement (de manière approchée) les problèmes locaux à résoudre Eq. (2). Par exemple, la contribution primale va être approchée ainsi

$$\tilde{\mathbf{U}}_{rp}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{M_U} \tilde{\mathbf{U}}_{rp}^i \pi_i(\boldsymbol{\mu}^{(s)}) \approx \mathbf{K}_{rr}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}) \mathbf{K}_{rp}(\boldsymbol{\mu}^{(s)}),$$

où  $\tilde{\mathbf{U}}_{rp}(\boldsymbol{\mu}^{(s)})$  prend la même structure “base réduite + coefficient d’interpolation”. Les fonctions  $\pi_i$  sont obtenues par projection de la solution exacte sur l’espace réduit engendré par la base réduite, ce qui dans la pratique revient à former et résoudre un petit système linéaire de taille  $M_U \times M_U$ .

Avec ces approximations en main, les factorisations de toutes les matrices définissant les problèmes locaux à résoudre dans la méthode DD sont substituées par l’évaluation de ces modèles d’ordre réduit, et les (nombreuses) descentes-remontées durant les itérations sont substituées par des produits matrice-vecteur uniquement. On résout alors un problème d’interface approché  $\tilde{\mathbf{F}}\boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{d}}$ , pouvant éventuellement être enrichi/corrigé par un solveur itératif global via les méthodes de type inexact FETI-DP [11, 12] ou multigrilles [8].

## 4 Application à l’optimisation de forme

La méthode de résolution combinant méthode de décomposition de domaine et modèles d’ordre réduit appliquée à des modèles isogéométriques permet d’envisager l’optimisation de structures lattices à l’échelle fine, sans hypothèses de séparation des échelles. L’utilisation de ROM semble d’autant plus pertinente dans ce cas. En effet, ces ROM construits a priori vont être utilisés et ré-utilisés :

- durant tout le processus d’optimisation,
- pour une large variété de problèmes d’optimisation différents,
- et pour évaluer efficacement les sensibilités.

Le dernier point donne accès aux algorithmes d’optimisation basés sur les gradients, ce qui est quasi-essentiel pour envisager de résoudre des problèmes d’optimisation avec de nombreux paramètres géométriques. Pour illustration, avoir un modèle d’ordre réduit des matrices de rigidité locales permet d’évaluer la sensibilité du travail des efforts intérieurs comme

$$\frac{\partial W_{\text{int}}^{(s)}}{\partial \mu_k} = \sum_{i=1}^{M_K} \mathbf{u}^{*(s)\top} \bar{\mathbf{K}}^i \mathbf{u}^{(s)} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mu_k}(\boldsymbol{\mu}^s).$$

Cela revient à évaluer les dérivées des fonctions d’interpolation  $\alpha_i$ , ce qui est généralement bien moins coûteux que de dériver l’opérateur directement. L’influence des paramètres géométriques a été “identifiée” lors de la génération des ROM.

Des exemples de cas d’optimisation de forme de structures lattices sont donnés en Fig. 2. Les deux premiers cas Fig. 2(a)-(b) présentent des cas d’optimisation en rigidité sous contrainte de masse, pour deux cellules unitaires différentes. En terme de temps de calcul, la résolution du problème complet prend environ 10 minutes sur un seul CPU standard. Cela est relativement faible en considérant le fait que le calcul de structures se fait à l’échelle fine, avec plus d’un million de DDL, et qu’il y a environ 1000 variables de conception. Sans méthodes numériques spécifiques, il n’est pas envisageable de résoudre de tels problèmes d’optimisation. Le second cas présenté en Fig. 2(c) consiste à adapter le gradient de forme de sorte à avoir une meilleure répartition des efforts de réaction lorsque la structure est comprimée, pour une application de type super-absorbent.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une approche combinant des modèles isogéométriques paramétrés, une méthode par décomposition de domaine et des modèles d’ordre réduit pour l’analyse de structures lattices à l’échelle fine. Cette approche, exploitant la quasi-périodicité intrinsèque de ces structures, introduit un problème d’interface approché construit via des modèles d’ordre réduit par bases réduites et méthodes d’interpolation empirique. Finalement, nous avons illustré sur quelques exemples comment une telle approche permet de résoudre efficacement des problèmes d’optimisation de forme de structures lattices.

## Références

- [1] Z. ALOMAR et F. CONCLI. « A Review of the Selective Laser Melting Lattice Structures and Their Numerical Models ». *Advanced Engineering Materials* 22.12 (2020), p. 2000611.
- [2] M. ASHBY. « Designing Architected Materials ». *Scripta Materialia* 68.1 (2013), p. 4-7.
- [3] N. CHARALAMBAKIS. « Homogenization Techniques and Micromechanics. A Survey and Perspectives ». *Applied Mechanics Reviews* 63.3 (2010).
- [4] J. L. EFTANG et A. T. PATERA. « A Port-Reduced Static Condensation Reduced Basis Element Method for Large Component-Synthesized Structures : Approximation and A Posteriori Error Estimation ». *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 1.1 (2014), p. 3.
- [5] G. ELBER. « Precise Construction of Micro-structures and Porous Geometry via Functional Composition ». *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Springer International Publishing, 2017, p. 108-125.
- [6] C. FARHAT, M. LESOINNE, P. LETALLEC, K. PIERSON et D. RIXEN. « FETI-DP : A Dual-Primal Unified FETI Method—Part I : A Faster Alternative to the Two-Level FETI Method ». *International journal for numerical methods in engineering* 50.7 (2001), p. 1523-1544.
- [7] H. GRIMM-STRELE et M. KABEL. « FFT-based Homogenization with Mixed Uniform Boundary Conditions ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 122.23 (2021), p. 7241-7265.
- [8] C. GUILLET, T. HIRSCHLER, P. JOLIVET et R. BOUCLIER. « Multilevel Matrix-Free Method for High-Performance Isogeometric Analysis of Lattice Structures ». *Journal of Computational Physics* 537 (2025), p. 114136.
- [9] J. S. HESTHAVEN, G. ROZZA et B. STAMM. *Certified Reduced Basis Methods for Parametrized Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2016.

- [10] T. HIRSCHLER, P. ANTOLIN et A. BUFFA. « Fast and Multiscale Formation of Isogeometric Matrices of Microstructured Geometric Models ». *Computational Mechanics* 69.2 (2022), p. 439-466.
- [11] T. HIRSCHLER, R. BOUCLIER, P. ANTOLIN et A. BUFFA. « Reduced Order Modeling Based Inexact FETI-DP Solver for Lattice Structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 125.8 (2024), e7419.
- [12] A. KLAWONN et O. RHEINBACH. « Inexact FETI-DP Methods ». *International journal for numerical methods in engineering* 69.2 (2007), p. 284-307.
- [13] P. LADEVÈZE, O. LOISEAU et D. DUREISSEIX. « A Micro–Macro and Parallel Computational Strategy for Highly Heterogeneous Structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52.12 (2001), p. 121-138.
- [14] X. LIU, L. GAO, M. XIAO et Y. ZHANG. « Kriging-Assisted Design of Functionally Graded Cellular Structures with Smoothly-Varying Lattice Unit Cells ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 390 (2022), p. 114466.
- [15] S. MCBANE et Y. CHOI. « Component-Wise Reduced Order Model Lattice-Type Structure Design ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 381 (2021), p. 113813.
- [16] D. MOLAVITABRIZI, S. KHAKALO, R. BENGTSOON et S. M. MOUSAVI. « Second-Order Homogenization of 3-D Lattice Materials towards Strain Gradient Media : Numerical Modelling and Experimental Verification ». *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 35.6 (2023), p. 2255-2274.
- [17] P. OUMAZIZ, P. GOSSELET, K. SAAVEDRA et N. TARDIEU. « Analysis, Improvement and Limits of the Multiscale Latin Method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 384 (2021), p. 113955.
- [18] A. QUARTERONI, A. MANZONI et F. NEGRI. *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2016.
- [19] J. SCHRÖDER. « A Numerical Two-Scale Homogenization Scheme : The FE2-method ». *Plasticity and Beyond*. T. 550. Vienna : Springer Vienna, 2014, p. 1-64.
- [20] J. WANG, J. ZHU, T. LIU, Y. WANG, H. ZHOU et W.-H. ZHANG. « Topology Optimization of Gradient Lattice Structure under Harmonic Load Based on Multiscale Finite Element Method ». *Structural and Multidisciplinary Optimization* 66.9 (2023), p. 202.
- [21] Z. WU, L. XIA, S. WANG et T. SHI. « Topology Optimization of Hierarchical Lattice Structures with Substructuring ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 345 (2019), p. 602-617.
- [22] X. XUE, C. LIN, F. WU, Z. LI et J. LIAO. « Lattice Structures with Negative Poisson’s Ratio : A Review ». *Materials Today Communications* 34 (2023), p. 105132.