

Sur une amélioration de la fonction distance à la base de données pour les approches pilotées par les données

H. Dandin¹, A. Leygue², A. Platzer³

¹ IRDL, UMR CNRS 6027, Univ Brest, Bretagne INP, CNRS, ENSTA Bretagne, Université Bretagne-Sud, Brest, France, heloise.dandin@enib.fr

² CNRS, GeM, Centrale Nantes, Nantes Université, UMR6183, 44300 Nantes, France, adrien.leygue@ec-nantes.fr

³ INSA Lyon, CNRS, LaMCoS, UMR5259, 69621 Villeurbanne, France, auriane.platzer@insa-lyon.fr

Résumé —

Les approches *data-driven computational mechanics* (DDCM) et *data-driven identification* (DDI) fournissent respectivement des méthodes de simulation de problèmes aux limites et d'identification de comportement matériau, sans écrire explicitement de relation de comportement. Le comportement matériau est uniquement échantillonné par un ensemble fini et discret de couples déformation-contraintes appelé base de données matériau. Dans les deux cas, la solution est obtenue à partir d'une minimisation de la distance entre deux types de couples déformation-contrainte : les états mécaniquement admissibles (cinématiquement et statiquement compatibles) et les états matériau prenant leur valeur dans la base de données. Ce travail apporte une modification simple de la distance afin d'y incorporer une information supplémentaire sur la réponse du matériau : le comportement tangent. Une expérience numérique préliminaire en DDI démontre la meilleure précision de cette approche.

Mots clés — Simulation pilotée par les données, Identification pilotée par les données, Caractérisation matériau

1 Introduction

Kirchdoerfer et Ortiz [11] ont proposé en 2016 un « nouveau paradigme », appelé *data-driven computational mechanics* (DDCM), qui fournit la solution d'un problème aux limites sans recours à la loi de comportement reliant, d'une part, le champ de déformation cinématiquement admissible, et la contrainte statiquement admissible d'autre part. À la place d'une relation mathématique, la réponse mécanique du matériau est représentée par une base de données de couples tensoriels déformation-contrainte qui échantillonnent la réponse mécanique du matériau. Le problème mécanique est reformulé comme un problème de minimisation d'une distance entre la variété continue d'admissibilité cinématique et statique, et l'ensemble des champs à valeur discrètes prises dans la base de données. Par cette représentation discrète, les comportements linéaires ou non-linéaires sont indifféremment traités. Le prix à payer est néanmoins une complexité accrue de la méthode de résolution, sensible aux nombreux minima locaux dans la fonction objectif.

Depuis, la DDCM a fait l'objet d'une attention particulière et de nombreuses extensions, que ce soit vers les simulations multiéchelles [9, 19, 20] ou les comportements anélastiques [6, 5], par exemple. Certains travaux se sont notamment concentrés sur l'amélioration de la précision et de la convergence de l'optimisation combinatoire au cœur de l'approche [12, 8, 7]. Néanmoins, la méthode repose sur la disponibilité d'une base de données matériau. Pour obtenir ces points expérimentaux sans biais, une méthode inverse, baptisée *data-driven identification* (DDI) a été proposée par Leygue et al. [14, 15] : les couples déformation-contrainte de la base de données sont générés à partir d'essai expérimentaux riches et de mesures de champs [3, 2].

Les deux méthodes – directe pour la DDCM et inverse pour la DDI – reposent entièrement sur la définition de la distance entre états mécaniques (couples déformation-contrainte admissibles) et états matériau (à valeur prise dans la base de données). Cette distance est une norme énergétique à deux termes – l'un porte sur l'écart en déformation et l'autre sur l'écart en contrainte – et introduit un tenseur pseudo-élastique comme paramètre de normalisation dont l'influence est peu maîtrisée. Dans ce papier, nous proposons de modifier le calcul de distance au cœur des deux méthodes, en supposant l'existence d'un

comportement tangent en chaque point de la base de données et en introduisant un paramètre ajustable de couplage entre les déformations et les contraintes. Nous démontrons l'efficacité de cette nouvelle formulation par rapport à la DDCM originale et discutons du cas limite d'un couplage fort entre déformations et contraintes. La reformulation équivalente de la DDI fournit un moyen simple d'identifier les points de la base de données en même temps que le comportement local tangent pour des cas de chargement complexes. La section 2 rappelle les formulations originales de la DDCM et de la DDI. La section 3 présente la modification proposée et ses conséquences sur la résolution des deux problèmes associés à chacune des méthodes. Enfin, les résultats et comparaisons pour une première expérience en DDI sont présentés dans la section 4.

2 La DDCM & la DDI en bref

Pour des raisons de simplicité, nous faisons l'hypothèse que la contrainte dans le matériau ne dépend que la déformation et nous nous plaçons dans le cadre des petites perturbations, en quasi-statique. Par ailleurs, le problème est directement exprimé après discrétisation par éléments finis sur un maillage comprenant n nœuds et m points d'intégration. Nous renvoyons le·a lecteur·rice intéressé·e vers [18, 6, 5] pour les extensions au-delà de ces hypothèses.

Dans ce cadre discrétisé, les n déplacement nodaux $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^n$ sont encodés dans un vecteur u de taille $2n$ ou $3n$ suivant la dimension du problème. De même, les m champs tensoriels, définis aux points d'intégration, de déformation infinitésimale $\{\varepsilon_e\}_{e=1}^m$ (resp. de contrainte de Cauchy $\{\sigma_e\}_{e=1}^m$) sont stockés dans un vecteur ε (resp. σ) de taille proportionnelle à m .

Dans la suite, nous présentons les deux méthodes originelles en miroir l'une de l'autre, à partir des définitions de l'admissibilité mécanique et de l'admissibilité matériau.

2.1 Admissibilité mécanique

Les conditions d'admissibilité des *états mécaniques* comprennent alors d'une part, la relation cinématique entre les déplacements nodaux u et les déformations ε :

$$\varepsilon = B u , \quad (1)$$

où la matrice B encode la géométrie et la connectivité du maillage éléments finis, et d'autre part, l'admissibilité statique des contraintes σ par rapport aux forces nodales appliquées f :

$$B^T W \sigma = f \quad (2)$$

où W est la matrice diagonale carrée des poids d'intégration w_e .

2.2 Admissibilité matériau sans modèle

Dans ces approches « sans modèle », le matériau est décrit par un ensemble fini de $N_{\mathcal{D}}$ valeurs $(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)$ qui échantillonnent sa réponse mécanique, où \mathcal{E} est un tenseur de déformation infinitésimal et \mathcal{S} est un tenseur de contrainte de Cauchy. Cet ensemble de couples déformation-contrainte du matériau forme la base de données matériau \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \{(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)\}_{i=1}^{N_{\mathcal{D}}} . \quad (3)$$

Le champ déformation-contrainte à valeurs discrètes qui associe chaque point matériel du solide à un couple déformation-contrainte de la base de données \mathcal{D} est alors appelé *état matériau*. Dans un cadre discrétisé, cet appariement entre le point d'intégration e et l'entrée $(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)$ de \mathcal{D} est encodé dans une matrice binaire P_{ei} . L'état matériau $(\varepsilon_e^*, \sigma_e^*)$ s'écrit alors

$$\varepsilon_e^* = \sum_{i'=1}^{N_{\mathcal{D}}} P_{ei'} \mathcal{E}_{i'} \quad \forall e, \quad \sigma_e^* = \sum_{i'=1}^{N_{\mathcal{D}}} P_{ei'} \mathcal{S}_{i'} \quad \forall e . \quad (4)$$

Comme précédemment, les états matériau du maillage éléments finis sont encodés dans des vecteurs ε^* et σ^* de façon appropriée.

Pour déterminer quel point de la base de données sélectionner, les méthodes DDCM et DDI reposent sur la définition d'une distance. Dans un premier temps, la distance quadratique entre un couple déformation-contrainte arbitraire $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ et une entrée $(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ de la base de données s'écrit

$$d^2((\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}), (\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})) = (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\mathcal{E}}) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\mathcal{E}}) + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\mathcal{S}}) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\mathcal{S}}), \quad (5)$$

avec \mathbb{C} le tenseur du quatrième ordre défini positif mentionné précédemment comme paramètre d'adimensionalisation dans la distance. Bien que ce dernier ait l'unité d'un tenseur d'élasticité, il ne s'agit pas d'un paramètre matériau, mais seulement d'un paramètre qui permet de comparer les déformations et les contraintes dans la même unité.

La pseudo-distance quadratique entre un couple déformation-contrainte et la base de données tout entière est alors obtenue par la minimisation de (5) :

$$d^2((\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}), \mathcal{D}) = \min_i d^2((\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}), (\boldsymbol{\mathcal{E}}_i, \boldsymbol{\mathcal{S}}_i)) , \text{ avec } (\boldsymbol{\mathcal{E}}_i, \boldsymbol{\mathcal{S}}_i) \in \mathcal{D} . \quad (6)$$

La fonction objectif F_C reliant tous les états mécaniques $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ et matériau $(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ du maillage s'écrit alors :

$$F_C = \frac{1}{2} \sum_{e'=1}^m w_{e'} d^2((\boldsymbol{\varepsilon}_{e'}, \boldsymbol{\sigma}_{e'}), (\boldsymbol{\varepsilon}_{e'}^*, \boldsymbol{\sigma}_{e'}^*)) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)^T W C (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T W C^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) , \quad (7)$$

avec C la matrice carrée encodant \mathbb{C} à chaque point d'intégration.

2.3 DDCM

Dans la DDCM, la base de données matériau \mathcal{D} est un prérequis, c'est-à-dire supposée connue et donnée. La solution du problème aux limites est alors le champ d'états mécaniques, c'est-à-dire de déformations et contraintes mécaniquement admissibles au sens de (1) et (2), qui minimisent la distance à la base de données, i.e. aux états matériau admissibles. Le problème peut alors être reformulé comme une minimisation de la fonction objectif (7) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, P &= \arg \min_{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, P} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)^T W C (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T W C^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) , \quad (8) \\ &\text{avec} \\ \text{admissibilité cinématique} & \quad \boldsymbol{\varepsilon} = B u , \\ \text{admissibilité statique} & \quad B^T W \boldsymbol{\sigma} = f , \\ \text{admissibilité matériau} & \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{i'} & \forall e , \\ \boldsymbol{\sigma}_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \boldsymbol{\mathcal{S}}_{i'} & \forall e . \end{cases} \end{aligned}$$

La nature discrète de P_{ei} implique une complexité combinatoire du problème d'optimisation et donc le recours à une heuristique pour le résoudre. La proposition originelle par Kirchdoerfer et Ortiz [11] de minimisation alternée est toujours utilisée dans la plupart des adaptations récemment publiées de la DDCM. À partir d'un état matériau initial $(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$, l'optimisation est conduite alternativement par rapport aux variables discrètes (P) puis continues $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ jusqu'à convergence.

La minimisation par rapport à P_{ei} pour un couple $(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\sigma}_e)$ donné est directe et conduite indépendamment sur chaque ligne de P (associé au point de quadrature e) :

$$P_{ei} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \arg \min_{i'} d^2((\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\sigma}_e), (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{i'}, \boldsymbol{\mathcal{S}}_{i'})) , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

La minimisation par rapport à $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ pour un appariement P donné correspond à la projection orthogonale des états matériau $(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ sur l'ensemble d'admissibilité mécanique. Cette projection peut être obtenue à partir de la stationnarité d'un Lagrangien. Pour les déformations, les équations sont réécrites en fonction du champ nodal de déplacement à partir de la relation (1) et en appliquant les conditions aux limites de Dirichlet sur le vecteur u . Pour les contraintes, la stationnarité du Lagrangien donne un système pseudo-élastique analogue, impliquant les multiplicateurs de Lagrange η , agissant comme un

champ de pseudo-déplacement (aux conditions de Dirichlet homogènes [16]). Les deux systèmes indépendants s'écrivent :

$$B^T W C B u = B^T W C \varepsilon^* , \quad (10a)$$

$$B^T W C B \eta = f - B^T W \sigma^* . \quad (10b)$$

Les états mécaniques sont alors obtenus après résolution de (10) par

$$\varepsilon = B u , \quad (11a)$$

$$\sigma = \sigma^* + C B \eta . \quad (11b)$$

Les itérations de la minimisation alternée entre (9) et (10)–(11) s'arrêtent lorsque la correction apportée aux états mécaniques est négligeable entre deux itérations.

2.4 DDI

La DDI propose de résoudre le problème d'identification de la base de données matériau \mathcal{D} directement depuis des données expérimentales. Elle permet ainsi de fournir des bases de données pour les simulations DDCM, ou bien des données riches et non biaisées pour l'identification de modèles de comportement. Dans ce travail, nous nous intéressons à la première application.

Dans ce cas, les champs connus sont le champ de déplacement u (et donc le champ de déformation ε), obtenu par exemple par des techniques de mesure de champs comme la corrélation d'images numériques, ainsi que le chargement appliqué, au travers des forces nodales f ¹. Ainsi, la DDI permet l'identification simultanée de la base de données matériau \mathcal{D} et des contraintes mécaniquement admissibles σ en résolvant le problème de minimisation de la fonction F_C à ε connu :

$$\sigma, P, \mathcal{E}, \mathcal{S} = \underset{\sigma, P, \mathcal{E}, \mathcal{S}}{\operatorname{arg\,min}} \quad \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^*)^T W C (\varepsilon - \varepsilon^*) + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^*)^T W C^{-1} (\sigma - \sigma^*) , \quad (12)$$

avec

$$\begin{array}{ll} \text{admissibilité statique} & B^T W \sigma = f , \\ \text{admissibilité matériau} & \begin{cases} \varepsilon_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \mathcal{E}_{i'} & \forall e , \\ \sigma_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \mathcal{S}_{i'} & \forall e . \end{cases} \end{array}$$

De même que pour la DDCM, la minimisation est résolue alternativement sur les inconnues à valeurs discrètes (P_{ei}) puis celles à valeurs continues (σ , \mathcal{E}_i , \mathcal{S}_i). La première suit (9) et la seconde est traitée, comme en DDCM, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La stationnarité du Lagrangien par rapport à σ s'écrit à nouveau comme (10b) et (11b); la stationnarité par rapport aux entrées de la base de données \mathcal{E}_i et \mathcal{S}_i donne :

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{W_i} \sum_{e'} P_{ei} W_{e'} \varepsilon_{e'} \quad \forall i , \quad (13)$$

et,

$$\mathcal{S}_i = \frac{1}{W_i} \sum_{e'} P_{ei} W_{e'} \sigma_{e'} \quad \forall i , \quad (14)$$

avec

$$W_i = \sum_{e'} P_{ei} W_{e'} \quad \forall i . \quad (15)$$

Les lecteurs·rices intéressé·es trouveront une analyse approfondie de la DDI dans [13], y compris une discussion sur le caractère bien posé du problème de minimisation (12). La DDI, comme la DDCM, fait appel au paramètre C qui n'est pas un opérateur tangent d'élasticité, mais bien un paramètre algorithme comme mentionné précédemment. La résolution des déformations et des contraintes mécaniques s'en trouve alors découplée : la différence entre les états déformation-contrainte et le comportement matériau n'est mesuré que par la distance (5), même le long d'un comportement tangent qu'on peut supposer

1. Cette hypothèse simplificatrice n'est pas réductrice, car la DDI fonctionne également sur la simple connaissance de la résultante des efforts extérieurs appliquée au niveau de l'actionneur [4]

existant. Les bonnes pratiques pour définir ce paramètre sont rarement discutées et peuvent pourtant influencer grandement sur la convergence de la méthode. En DDI, un paramètre additionnel est la taille de la base de donnée N_D , dont l'influence sur les propriétés de convergence de la méthode est discutée en détails dans [10].

3 Définition d'une nouvelle distance

Dans ce travail, nous proposons d'améliorer les approches DDCM et DDI pour prendre en compte l'existence d'un comportement tangent, sans toutefois avoir à le décrire formellement. Pour ce faire, re-définissons la base de données matériau comme la collection de triplets déformation-contrainte-opérateur tangent :

$$\mathcal{D} = \{(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i, \mathbb{H}_i)\}_{i=1}^{N_D}, \quad (16)$$

où, comme précédemment, la couple déformation-contrainte $(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)$ échantillonnent le comportement matériau et \mathbb{H}_i est l'opérateur tangent d'élasticité local. L'état matériau (4) est alors enrichi de cet opérateur tangent :

$$\varepsilon_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \mathcal{E}_{i'} \quad \forall e, \quad \sigma_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \mathcal{S}_{i'} \quad \forall e, \quad \mathbb{H}_e^* = \sum_{i'=1}^{N_D} P_{ei'} \mathbb{H}_{i'} \quad \forall e. \quad (17)$$

La distance (5) est alors redéfinie comme suit :

$$d^2((\varepsilon, \sigma), (\mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathbb{H})) = \begin{pmatrix} \varepsilon - \mathcal{E} \\ \sigma - \mathcal{S} \end{pmatrix}^T : \begin{pmatrix} \mathbb{H} & \alpha \mathbb{I} \\ \alpha \mathbb{I} & \mathbb{H}^{-1} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon - \mathcal{E} \\ \sigma - \mathcal{S} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

avec α un paramètre scalaire tel que $0 \leq \alpha < 1$. Grâce à cette nouvelle pseudo-distance (18), le calcul de la fonction objectif sur l'ensemble du maillage (7) devient :

$$F_{\alpha, H} = \sum_{e'=1}^m w_{e'} d^2((\varepsilon_{e'}, \sigma_{e'}), (\varepsilon_{e'}^*, \sigma_{e'}^*, \mathbb{C}_{e'}^*)) = (\varepsilon - \varepsilon^*)^T W H (\varepsilon - \varepsilon^*) + (\sigma - \sigma^*)^T W H^{-1} (\sigma - \sigma^*) - 2\alpha (\sigma - \sigma^*)^T (\varepsilon - \varepsilon^*). \quad (19)$$

où la matrice H collecte tous les opérateurs tangents matériau \mathbb{H}_e^* , potentiellement distincts pour chaque point d'intégration e .

3.1 DDCM augmentée

La DDCM augmentée est définie en remplaçant simplement la fonction objectif dans (9) par la distance globale (19) (avec un facteur 1/2), le reste étant inchangé. La solution des champs déformation-contrainte mécaniquement admissibles est obtenue de la même manière par une minimisation alternée. La minimisation par rapport aux appariements P_{ei} s'écrit désormais :

$$P_{ei} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \arg \min_{i'} d^2((\varepsilon_e, \sigma_e), (\mathcal{E}_{i'}, \mathcal{S}_{i'}, \mathbb{H}_{i'})) , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (20)$$

La stationnarité du Lagrangien, à P fixé, par rapport aux variables continues (ε, σ) dépend désormais du paramètre α . Les systèmes pseudo-élastiques obtenus en (10) et les corrections associés (11) deviennent alors :

$$B^T W H B u = B^T W H \varepsilon^* - \alpha B^T W \sigma^* + \alpha f, \quad (21a)$$

$$B^T W H B \eta = (1 - \alpha^2) (f - B^T W \sigma^*), \quad (21b)$$

et

$$\varepsilon = B u, \quad (22a)$$

$$\sigma = \sigma^* + H B \eta + \alpha H (B u - \varepsilon^*). \quad (22b)$$

Notons quelques remarques sur cette nouvelle formulation de la DDCM :

- Les déformations ε et les contraintes σ étant désormais explicitement couplées dans la fonction objectif (19), le vecteur des forces nodales se retrouvent dans le système donnant les déplacements (21a) et dans la correction des contraintes (22b);
- Le couplage reste suffisamment faible pour pouvoir résoudre successivement les déplacements u et les déformations ε , utilisés ensuite dans la résolution des multiplicateurs de Lagrange η , associés aux contraintes σ , sans avoir recours à la résolution d'un plus gros système d'équations couplées;
- La structure du solveur DDCM est ainsi préservée en grande partie;
- Lorsque $\alpha = 1$, la matrice impliquée dans (18) devient singulière, ce qui entraîne une dégénérescence de la distance. Dans ce cas, l'état mécanique sera exactement sur le comportement tangent encodé par \mathbb{H} pour le point de la base de données le plus proche. En regardant les équations de plus près, on retrouve les approches de projection sur l'espace tangent, proposées notamment par [1, 17].

3.2 DDI augmentée

Le changement de fonction objectif de (7) à (19) dans la DDI ajoute H aux solutions du problème de minimisation (12), autrement inchangé. Pour obtenir cette nouvelle sortie, la résolution est conduite en deux temps :

1. Une première DDI standard (12) est lancée (c.-à-d. correspondant à $\alpha = 0$, pour un C fixé) afin de déterminer une première estimation de l'appariement P , des entrées $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ de la base de données matériau et des contraintes mécaniquement admissibles σ ;
2. L'opérateur tangent local \mathbb{H}_i pour tous les points de la base de données sont déterminés en même temps que les contraintes mécaniques σ et matériau \mathcal{S} sont corrigées, en trois étapes, répétées jusqu'à convergence :
 - (a) Pour chaque point i de la base de données, l'opérateur tangent \mathbb{H}_i est déterminé à partir des vecteurs propres et valeurs propres de la distribution des déformations et contraintes mécaniquement admissibles associées $\{(\varepsilon_e, \sigma_e) - (\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i) | P_{ei} = 1\}$;
 - (b) L'estimation des contraintes mécaniquement admissibles σ est corrigée en utilisant (22b)
 - (c) Les contraintes de la base de données matériau \mathcal{S} sont corrigées comme dans (14).

Notons que, bien qu'il soit tentant de prendre $\alpha = 1$ dans la procédure décrite ci-dessus, la présence éventuelle de bruit de mesure dans les déformations mécaniques ε en entrée suggère de prendre des valeurs modérées.

4 Résultats numériques

Dans ce travail, la nouvelle formulation de la fonction objectif est testée d'abord sur la DDI, rebaptisée DDI- α . Les base de données nouvellement acquises ainsi seront mises en œuvre dans une simulation DDCM dans un futur proche. Pour tester l'approche dans des conditions maîtrisées, la DDI est appliquée sur des données synthétiques, générées à partir d'une simulation Éléments Finis sur un treillis de barres avec la relation non linéaire déformation-contrainte suivante :

$$\sigma = \hat{\sigma}(\varepsilon) = E \log(1 + 50\varepsilon) \quad (23)$$

Le treillis, illustré Figure 1, compte 464 nœuds et 1250 éléments barre. Un déplacement nul est imposé sur le bord bas, tandis qu'un déplacement vertical correspondant à 8% de la hauteur totale est imposé sur le bord haut. Tous les autres bords sont supposés libres de contrainte. Les entrées de l'algorithme DDI sont le maillage numérique, le champ de déplacement et l'effort résultant sur le bord haut, qu'on suppose mesuré. Un multiplicateur de Lagrange supplémentaire est introduit puisque les efforts nodaux sur le bord haut sont inconnus, cf. [4]. Étant donné que la DDI fonctionne très bien dans ce cas de figure, nous cherchons délibérément à effectuer l'identification sur une base de données peu dense, de taille $N_{\mathcal{D}} = 10$ seulement. Une valeur de $\alpha = 0.7$ est choisie de manière arbitraire.

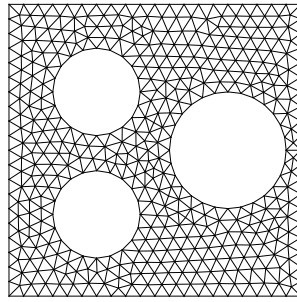


FIGURE 1 – Maillage pour la génération de données synthétiques pour la DDI.

Les résultats de la DDI standard et de la nouvelle implémentation DDI- α sont illustrés sur la Figure 2. Les deux méthodes fournissent des estimations raisonnables des contraintes. Cependant, les estimations fournies par la DDI- α sont beaucoup plus proches du « vrai » comportement matériau sous-jacent. En particulier, on observe une meilleure correspondance pour les déformations négatives, où la réponse du matériau est plus raide, et pour les déformations élevées où les données sont rares. Sans surprise, le comportement identifié est linéaire par morceaux, des discontinuités apparaissant lorsque la réponse mécanique passe d'un point de la base de données à un autre. Des techniques de régularisation supplémentaires pourraient être utilisées pour lisser les résultats.

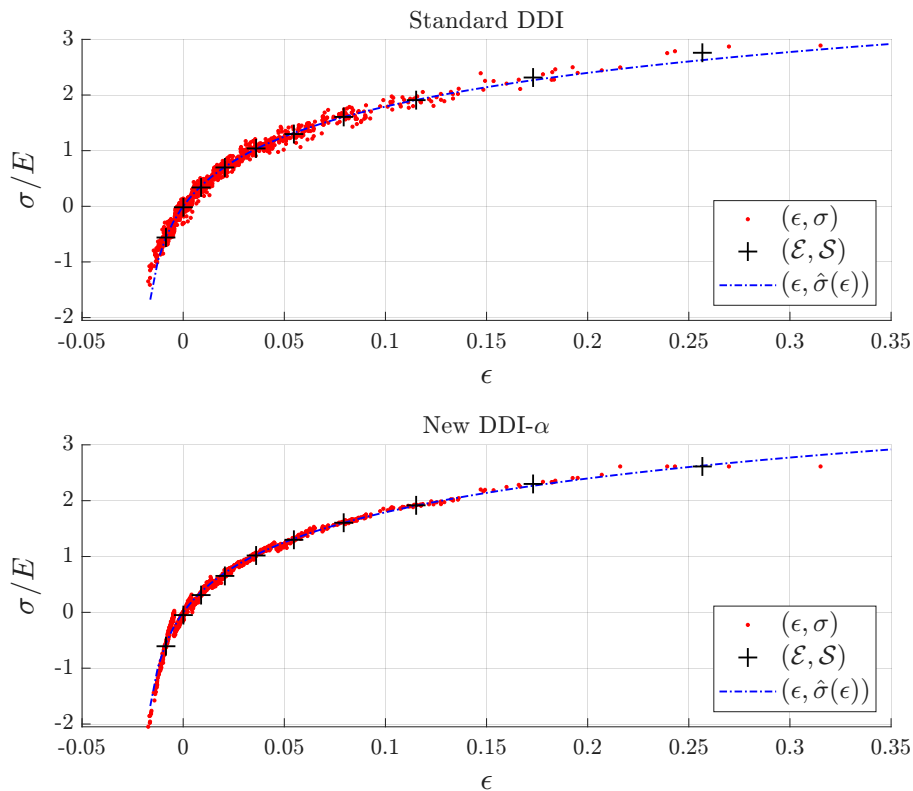


FIGURE 2 – Comparaison entre la DDI standard et la DDI- α sur des données synthétiques.

5 Conclusions

Cette étude présente une correction de la distance sur laquelle se basent les approches pilotées par les données pour le calcul direct et l'identification sans modèle de comportement. Cette modification permet l'interprétation de cette distance en termes de comportement matériau local autour de chaque point de la base de données. Dans un cas limite, on retrouve la « projection sur un espace tangent » introduite par d'autres auteurs. L'avantage de l'approche développée ici réside dans sa polyvalence : elle peut être utilisée à la fois pour résoudre des problèmes aux conditions aux limites (DDCM), mais aussi

pour identifier la base de données matériau à partir d'essais complexes (DDI). Des résultats numériques préliminaires semblent indiquer des améliorations significatives en DDI par rapport à sa formulation originale. Ces résultats doivent être confirmés dans un futur proche sur la DDCM, alimentée par des bases de données plus fiables.

Références

- [1] K. Ciftci and K. Hackl. Model-free data-driven simulation of inelastic materials using structured data sets, tangent space information and transition rules. *Computational Mechanics*, 70(2) :425–435, Aug. 2022.
- [2] L. Costecalde. *Data-Driven Model Identification for hyperelasticity : mapping the strain energy throughout multiaxial experiments*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, Dec. 2023.
- [3] M. Dalémat. *Une expérimentation réussie pour l'identification de la réponse mécanique sans loi de comportement : Approche data-driven appliquée aux membranes élastomères*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, Dec. 2019.
- [4] M. Dalémat, M. Coret, A. Leygue, and E. Verron. Robustesse de l'algorithme Data-Driven Identification avec des données d'entrée incomplètes. *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*, 2024.
- [5] H. Dandin, A. Leygue, and L. Stainier. Graph-based representation of history-dependent material response in the data-driven computational mechanics framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 419 :116694, 2024.
- [6] R. Eggersmann, T. Kirchdoerfer, S. Reese, L. Stainier, and M. Ortiz. Model-free data-driven inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 350 :81–99, 2019.
- [7] R. Eggersmann, L. Stainier, M. Ortiz, and S. Reese. Efficient data structures for model-free data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 382 :113855, Aug. 2021.
- [8] R. Eggersmann, L. Stainier, M. Ortiz, and S. Reese. Model-free data-driven computational mechanics enhanced by tensor voting. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 373 :113499, 2021.
- [9] A. Gorgogianni, K. Karapiperis, L. Stainier, M. Ortiz, and J. E. Andrade. Adaptive goal-oriented data sampling in data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 409 :115949, 2023.
- [10] N. Hachem, A. Leygue, and L. Stainier. Mathematical and numerical assessment of Data-Driven Identification method applied to nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 446 :118273, Nov. 2025.
- [11] T. Kirchdoerfer and M. Ortiz. Data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304 :81–101, 2016.
- [12] T. Kirchdoerfer and M. Ortiz. Data driven computing with noisy material data sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326 :622–641, 2017.
- [13] A. Leygue. On the formulation and convergence of Data-Driven Identification. *Comptes Rendus. Mécanique*, 353(G1) :761–773, 2025.
- [14] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, and E. Verron. Data-based derivation of material response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 :184–196, Apr. 2018.
- [15] A. Leygue, R. Seghir, J. Réthoré, M. Coret, E. Verron, and L. Stainier. Non-parametric material state field extraction from full field measurements. *Computational Mechanics*, 64(2) :501–509, Aug. 2019.
- [16] L. T. K. Nguyen, M. Rambašek, and M.-A. Keip. Variational framework for distance-minimizing method in data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 365 :112898, 2020.
- [17] D. K. N. Pham, N. Blal, and A. Gravouil. Tangent space Data Driven framework for elasto-plastic material behaviors. *Finite Elements in Analysis and Design*, 216 :103895, 2023.
- [18] A. Platzer. *Finite strain data-driven computational mechanics. From tailored data to adaptive solvers for multiscale simulations*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2020.
- [19] E. Prume, C. Gierden, M. Ortiz, and S. Reese. Direct data-driven algorithms for multiscale mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 433 :117525, 2025.
- [20] F. Rocha, A. Platzer, A. Leygue, and L. Stainier. On-the-fly adaptive sampling strategy for data-driven computational mechanics : Applications to computational homogenisation. *Mechanics of Materials*, 207 :105382, 2025.