

Schéma d'ordre élevé en espace et en temps basé sur la resommation de Borel-Laplace et les ondelettes

S. Kadri-Harouna¹, A. Hamdouni², D. Razafindralandy³

¹ MIA, La Rochelle Université, souleymane.kadri_harouna@univ-lr.fr

² LaSIE, UMR 7356 CNRS - La Rochelle Université, aziz.hamdouni@univ-lr.fr

³ LaSIE, UMR 7356 CNRS - La Rochelle Université, dina.razafindralandy@univ-lr.fr

Résumé — On présente une méthode d'intégration numérique d'ordre élevé en temps et en espace. Le schéma spatiale est basée sur les ondelettes, tandis que l'intégrateur temporel est une décomposition en série suivie de la technique de resommation de Borel-Laplace. On applique la méthode à la résolution des équations d'un fluide.

Mots clés — Schéma d'ordre élevé, séries divergentes, resommation, ondelettes à divergence nulle, CFD

1 Introduction

Dans beaucoup de domaines de la mécanique, disposer d'un schéma d'ordre élevé pour la discrétisation temporelle est indispensable pour modéliser fidèlement des phénomènes qui évoluent rapidement. C'est le cas par exemple lorsqu'on étudie les chocs, les explosions ou encore les seismes, où une dynamique à hautes fréquences est attendue. De plus, bien que le coût de calcul par pas de temps soit plus élevé pour un schéma d'ordre élevé, le nombre total de pas requis pour atteindre une précision donnée est généralement bien inférieur à celui d'un schéma d'ordre faible. Ainsi, le coût computationnel global est souvent plus réduit, rendant les schémas d'ordre élevé plus efficaces pour les simulations de phénomènes sur de temps longs, comme en mécanique céleste ou en dynamique moléculaire.

Pour assurer la stabilité, les schémas temporels d'ordre élevé utilisés dans la pratique sont généralement implicites (BDF [1, 2], méthodes de Runge-Kutta [3, 4, 5], de Gauss, de Radau, de Lobatto [2, 6], intégrateur exponentiel [7]). Quelques schémas explicites sont toutefois proposés, par exemple dans [8] où la solution est cherchée directement sous forme d'une série de Taylor tronquée à un ordre élevé. Dans [9], on augmente le domaine de validité de la série de Taylor en utilisant les approximants de Padé. Toutefois, ces deux approches peuvent ne pas être efficaces lorsque la série de Taylor est (numériquement) divergente. Dans ce dernier cas, une technique basée sur la resommation de série divergente, appelée resommation de Borel-Laplace, a été proposée dans [10, 11, 12].

Etant d'ordre élevé et explicite, l'intégrateur de Borel-Laplace est non seulement rapide mais garantit aussi la préservation de propriétés physiques telles que l'iso-spectralité ou la simplecticité avec une bonne précision, lors de la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires (ODE). De plus, il possède un domaine de stabilité large.

Ayant prouvé son efficacité pour la résolution d'ODE, l'intégrateur a été utilisé comme intégrateur temporel dans la résolution d'équations dynamiques. Dans [13], il a été associé à un schéma spatial de différences finies, tandis que [14], la méthode de discrétisation spatiale a été celle des éléments finis. Dans la présente communication, on propose un schéma d'ordre élevé, non seulement en temps via l'intégrateur de Borel-Laplace, mais aussi en espace. Pour cela on utilisera les ondelettes [15].

La méthode des ondelettes présente plusieurs avantages. La décroissance rapide des coefficients d'ondelettes en fonction de la régularité offre une représentation parcimonieuse de la solution, ce qui est particulièrement utile pour la résolution de problèmes à grande degré de

liberté. De plus, le caractère multi-échelle des ondelettes permet de capturer efficacement les structures locales et les singularités.

Dans ce travail, on appliquera notre approche à la résolution des équations de Navier-Stokes pour la simulation d'un écoulement incompressible de fluide visqueux. Dans ce cadre, les ondelettes présente un avantage supplémentaire. En effet, on peut les choisir à divergence nulle, ce qui permet de s'affranchir de la condition d'incompressibilité. Ce faisant, on n'a pas besoin de recourir à des méthodes supplémentaires (projection, pénalisation, ...) qui nécessitent souvent la résolution d'une équation de type Poisson, qu'il faudra doter de conditions aux limites non physiques.

Dans la section 2, on propose une méthode de construction de base d'ondelettes à divergence nulle et vérifiant les conditions au bord de Dirichlet, pour la discrétisation spatiale. La section 3, est consacré au schéma d'intégration temporelle. Enfin, la section 4 rassemble quelques résultats numériques préliminaires en mécanique des fluides, qui seront complétés lors de la présentation.

2 Décomposition en ondelettes à divergence nulle

On construit les ondelettes à divergence nulle avec des conditions de type Dirichlet homogène en plusieurs étapes. D'abord, on va construire une analyse multirésolution (AMR) sur un intervalle, en considérant les conditions aux limites de type Dirichlet et de type Neumann. Ensuite, on construit une AMR d'ondelettes à divergence nulle. Enfin, on se restreint aux ondelettes qui s'annulent au bord.

Plusieurs méthodes existent pour construire des ondelettes à divergence nulle ([16, 17, 18, 19, 20]). Celle présentée dans [18] et qui sera suivie ici consiste à construire deux AMR biorthogonales de $L^2(0,1)$, notées (V_j^1, \tilde{V}_j^1) et (V_j^0, \tilde{V}_j^0) telles que :

$$\frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0 \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j^0 = \left\{ \int_0^x f(t) dt : f \in \tilde{V}_j^1 \right\} \cap H_0^1(\Omega). \quad (1)$$

Chacun de ces espaces est engendré par une fonction d'échelle. Plus précisément, d'un côté,

$$V_j^1 = \text{vect} \left\{ \varphi_{j,k}^1 ; 0 \leq k \leq N_j - 1 \right\} \quad \text{et} \quad V_j^0 = \text{vect} \left\{ \varphi_{j,k}^0 ; 0 \leq k \leq N_j - 2 \right\}, \quad (2)$$

où

$$\varphi_{j,k}^\varepsilon = 2^{j/2} \varphi^\varepsilon(2^j x - k), \quad \varepsilon = 0, 1$$

φ^ε étant une fonction à support compact dans \mathbb{R} et N_j le paramètre de dimension [18, 21]. De l'autre côté

$$\tilde{V}_j^1 = \text{vect} \left\{ \tilde{\varphi}_{j,k}^1 ; 0 \leq k \leq N_j - 1 \right\} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j^0 = \text{vect} \left\{ \tilde{\varphi}_{j,k}^0 ; 0 \leq k \leq N_j - 2 \right\},$$

avec la condition de biorthogonalité entre les bases :

$$\langle \varphi_{j,k}^\varepsilon, \tilde{\varphi}_{j,k'}^\varepsilon \rangle = \delta_{k,k'}. \quad (3)$$

Le paramètre d'échelle j est pris suffisamment grand, $j \geq j_{min}$, pour éviter les effets de bord. Les espaces d'ondelettes biorthogonaux (W_j^1, \tilde{W}_j^1) sont classiquement par [22] :

$$W_j^1 = V_{j+1}^1 \cap (\tilde{V}_j^1)^\perp, \quad \tilde{W}_j^1 = \tilde{V}_{j+1}^1 \cap (V_j^1)^\perp.$$

Ils sont engendrés par des bases d'ondelettes biorthogonales :

$$W_j^1 = \text{vect} \{ \psi_{j,k}^1 ; 0 \leq k \leq 2^j - 1 \} \quad \text{et} \quad \tilde{W}_j^1 = \text{vect} \{ \tilde{\psi}_{j,k}^1 ; 0 \leq k \leq 2^j - 1 \}. \quad (4)$$

Les bases $\{ \psi_{j,k}^0 \}_{j \geq j_{min}}$ de $W_j^0 = V_{j+1}^0 \cap (\tilde{V}_j^0)^\perp$ et $\{ \tilde{\psi}_{j,k}^0 \}_{j \geq j_{min}}$ de $\tilde{W}_j^0 = \tilde{V}_{j+1}^0 \cap (V_j^0)^\perp$ sont définies à partir des bases d'ondelettes de $(W_j^1, \tilde{W}_j^1)_{j \geq j_{min}}$ par [16, 18] :

$$\psi_{j,k}^0 = 2^{-j} (\psi_{j,k}^1)' \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{j,k}^0 = -2^j \int_0^x \tilde{\psi}_{j,k}^1(t) dt. \quad (5)$$

On peut construire une AMR biorthogonale (V_j^d, \tilde{V}_j^d) de $H_0^1(0,1)$ en prenant [18] :

$$\begin{aligned} V_j^d &= V_j^1 \cap H_0^1(0,1) = \text{vect}\{\varphi_{j,k}^d = \varphi_{j,k}^1 ; 1 \leq k \leq N_j - 2\}, \\ \tilde{V}_j^d &= \tilde{V}_j^1 \cap H_0^1(0,1) = \text{vect}\{\tilde{\varphi}_{j,k}^d = \tilde{\varphi}_{j,k}^1 ; 1 \leq k \leq N_j - 2\}. \end{aligned} \quad (6)$$

On aura aussi besoin d'introduire une AMR biorthogonale $(V_j^{dd}, \tilde{V}_j^{dd})$ de l'espace $H_{dd}^1(0,1)$ des fonctions de $H_0^1(0,1)$ qui vérifient une condition de Neumann homogène par :

$$\begin{aligned} V_j^{dd} &= V_j^1 \cap H_{dd}^1(0,1) = \text{vect}\{\varphi_{j,k}^{dd} = \varphi_{j,k}^1 ; 2 \leq k \leq N_j - 3\}, \\ \tilde{V}_j^{dd} &= \tilde{V}_j^1 \cap H_{dd}^1(0,1) = \text{vect}\{\tilde{\varphi}_{j,k}^{dd} = \tilde{\varphi}_{j,k}^1 ; 2 \leq k \leq N_j - 3\}. \end{aligned} \quad (7)$$

On a

$$\frac{d}{dx} V_j^{dd} \subset V_j^{0d}, \quad \text{où} \quad V_j^{0d} = H_0^1 \cap V_j^0,$$

Les bases d'ondelettes associées aux AMR (V_j^d, \tilde{V}_j^d) , $(V_j^{0d}, \tilde{V}_j^{0d})$ et $(V_j^{dd}, \tilde{V}_j^{dd})$ sont notés $\{\psi_{j,k}^d, \tilde{\psi}_{j,k}^d\}$, $\{\psi_{j,k}^{0d}, \tilde{\psi}_{j,k}^{0d}\}$ et $\{\psi_{j,k}^{dd}, \tilde{\psi}_{j,k}^{dd}\}$.

Comme l'espace $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ des fonctions à divergence nulle est tel que $\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \mathbf{rot}(H_0^1(\Omega))$, les espaces $\mathbf{V}_j^{div} = \mathbf{rot}(V_j^d \otimes V_j^d) = (V_j^d \otimes V_j^{0d}) \times (V_j^{0d} \otimes V_j^d)$ forment une AMR de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$. Ils sont engendrés par les fonctions d'échelle suivantes :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div} := \mathbf{rot}[\varphi_{j,k_1}^d \otimes \varphi_{j,k_2}^d] = \begin{bmatrix} \varphi_{j,k_1}^d \otimes (\varphi_{j,k_2}^d)' \\ -(\varphi_{j,k_1}^d)' \otimes \varphi_{j,k_2}^d \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{k} = (k_1, k_2). \quad (8)$$

Les ondelettes à divergence nulle correspondantes s'obtiennent comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,1} &:= \mathbf{rot}[\varphi_{j_{min},k} \otimes \psi_{j_2,k_2}], \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,2} &:= \mathbf{rot}[\psi_{j_1,k_1} \otimes \varphi_{j_{min},k}], \\ \Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,3} &:= \mathbf{rot}[\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}], \quad \text{pour } \mathbf{j} = (j_1, j_2), \quad j_1, j_2 \geq j_{min}, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathcal{I}_j, \end{aligned} \quad (9)$$

avec $\mathcal{I}_j = \{0, 1, \dots, 2^{j_1} - 1\} \times \{0, 1, \dots, 2^{j_2} - 1\}$.

Enfin, une AMR de $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^2 \cap \mathcal{H}_{div}(\Omega)$ est donnée par

$$\mathbf{V}_j^{div,0} = (V_j^d \otimes V_j^{0d}) \times (V_j^{0d} \otimes V_j^d) \cap \mathcal{H}_{div,0}(\Omega) = \text{vect}(\varphi_{j,\mathbf{k}}^{div,0}) \quad (10)$$

où $\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div,0} = \mathbf{rot}[\varphi_{j,k_1}^{dd} \otimes \varphi_{j,k_2}^{dd}]$. Notons $\Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,0}$ les fonctions $\Phi_{j,\mathbf{k}}^{div,0}$ ainsi que les ondelettes correspondantes sans distinction (ils engendrent donc $\mathcal{H}_{div,0}(\Omega)$).

Considérons la projection

$$\mathbb{P}^{div,0} : \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2 \longmapsto \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} d_{j,\mathbf{k}}^{div,0} \Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,0} \in \mathcal{H}_{div,0}(\Omega).$$

Le calcul des coefficients de $\mathbb{P}^{div,0}(\mathbf{u})$ s'obtient par

$$\mathbb{M}_{div,0} [d_{j,\mathbf{k}}^{div,0}] = [\langle \mathbf{u}, \Psi_{j,\mathbf{k}}^{div} \rangle], \quad (11)$$

où $\mathbb{M}_{div,0}$ désigne la matrice de Gram de la base $\{\Psi_{j,\mathbf{k}}^{div,0}\}$, qui n'est autre que la matrice de rigidité de l'opérateur Laplacien 2D, sur la base d'ondelettes scalaires.

3 Décomposition en série temporelle et resommation

Considérons les équations de Navier-Stokes incompressibles, de densité 1 pour simplifier

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

associées à une condition initiale

$$\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

et une condition aux limites de type Dirichlet homogène au bord. Pour la résolution, on décompose la vitesse \mathbf{u} , la pression p sous forme de séries formelles temporelles

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbf{u}^n(\mathbf{x}), \quad p(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n p^n(\mathbf{x}). \quad (13)$$

Les termes des séries vérifient la relation de récurrence

$$\begin{cases} (n+1)\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^n = \mathbf{f}^n & \text{où} & \mathbf{f}^n = \nu \Delta \mathbf{u}^n - (\nabla \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Notons que les séries (13) peuvent être divergentes, ou avoir un rayon de convergence numérique très faible. Dans ce cas, l'algorithme de resommation qui sera présenté ultérieurement est indispensable.

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes se fait souvent en découplant le calcul de la vitesse et de la pression, et en utilisant un schéma de type prédicteur-correcteur [23]. On peut s'inspirer de ce type de schéma pour résoudre le système (14). Par exemple, en adaptant la méthode de projection de Chorin et Temam [24, 25, 26], on obtiendrait :

$$\begin{cases} (n+1)\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}^n, \\ (n+1)(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = 0 \end{cases} \quad (15)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ serait une vitesse auxiliaire à divergence non nécessairement nulle. Le calcul de p^n se ferait en prenant la divergence de la deuxième équation de (15) et en utilisant un solveur de Poisson. L'inconvénient serait que cela nécessiterait une condition aux bords sur la pression p^n . On pourrait, comme cela se fait habituellement dans la littérature, imposer une condition aux limites artificielles de type Neuman homogène. Comme ces conditions ne sont pas physiques, cela dégraderait la qualité de la solution numérique en provoquant des oscillations aux bords [23, 26, 27].

Pour pallier ce problème, on propose d'utiliser des ondelettes à divergence nulle pour résoudre le système (14). Pour cela, on calcule une vitesse intermédiaire $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ définie comme suit :

$$(n+1)(\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla p^n = 0. \quad (16)$$

La décomposition de Helmholtz-Hodge de $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ s'écrit [28] :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbb{P}^{div,0}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) + \nabla \xi^{n+1} \quad (17)$$

pour un certain champ scalaire ξ^{n+1} . En injectant cette relation dans (16), on obtient :

$$(n+1)[\mathbf{u}^{n+1} - \mathbb{P}^{div,0}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})] + \nabla(p^n - (n+1)\xi^{n+1}) = 0. \quad (18)$$

On a alors le schéma de résolution suivant du système (14), analogue à (15) :

$$\begin{cases} (n+1)\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}^n, \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbb{P}^{div,0}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}). \end{cases} \quad (19)$$

Pour la discretisation en espace de (19), on utilisera la méthode de Galerkin sur la base d'ondelette associée aux espaces $\mathbf{V}_j = (V_j^d \otimes V_j^{0d}) \times (V_j^{0d} \otimes V_j^d)$. A une résolution fixée $j \geq j_{\min}$, les solutions numériques $\tilde{\mathbf{u}}^n$ et \mathbf{u}^n sont recherchées comme une combinaison linéaire d'ondelettes :

$$\tilde{\mathbf{u}}^n = \sum_{j_{\min}-1 \leq |j| < j} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{d}_{j,\mathbf{k}}^n \Psi_{j,\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^n = \sum_{j_{\min}-1 \leq |j| < j} \sum_{\mathbf{k}} d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},n} \Psi_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},0}, \quad (20)$$

Puisque les bases d'ondelettes sont connues, le calcul des coefficients $(\tilde{d}_{j,\mathbf{k}}^{n+1})$ et $(d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},0,n+1})$ conduit à la résolution de deux systèmes linéaires :

$$(n+1)\mathbb{A} \begin{bmatrix} \tilde{d}_{j,\mathbf{k}}^{n+1} \end{bmatrix} = \mathbb{M} \begin{bmatrix} d_{j,\mathbf{k}}^n \end{bmatrix} + \mathbb{A} \begin{bmatrix} h_{j,\mathbf{k}}^n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

et

$$\mathbb{M}_{\text{div},0} \begin{bmatrix} d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},n+1} \end{bmatrix} = \left[\langle \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \Psi_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},0} \rangle \right], \quad (22)$$

où $d_{j,\mathbf{k}}^n$ et $h_{j,\mathbf{k}}^n$ sont respectivement les coefficients de la projection de \mathbf{u}^n et de $(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n$ sur l'espace engendré par la base $\Psi_{j,\mathbf{k}}$. Le terme non linéaire $(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n$ est calculé par différences finies du même ordre que celui de l'approximation polynomiale de la fonction d'échelle φ^1 [29].

Pour j fixé, notons $U_{\mathbf{k}}^n = [d_{j,\mathbf{k}}^{\text{div},n}]$ les coefficients d'ondelettes de \mathbf{u}^n , obtenus avec le schéma (19), et $U_{\mathbf{k}}$ celle de \mathbf{u} . On a

$$U_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_{\mathbf{k}}^n. \quad (23)$$

La série (23) peut être divergente. Une procédure de resommation est donc indispensable. Mais même lorsque la série est convergente, le rayon de convergence est généralement faible. Pour accroître le domaine de validité de la solution numérique, on propose d'appliquer la technique de resommation de Borel-Laplace à chacune des composantes $U_{\mathbf{k}}$ [30, 31, 32]. Elle consiste à trouver une représentation de la série (23) par une intégrale dont le domaine de définition est plus large. Cette technique se décompose en 3 étapes, qui sont résumé dans le tableau 1. Dans la pratique, les coefficients $U_{\mathbf{k}}^n$ ne sont connus que jusqu'à un ordre fini N . La prolongation est réalisée par les approximants de Padé et l'intégration de Laplace est réalisée par la quadrature de Gauss-Laguerre.

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_{\mathbf{k}}^n t^n & \sim & SU_{\mathbf{k}}(t) = U_{\mathbf{k}}^0 + \int_0^{+\infty} P(\xi) e^{-\xi/t} d\xi \\ \text{Borel} \downarrow & & \uparrow \text{Laplace} \\ \mathcal{B}u(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_{\mathbf{k}} \xi^k & \xrightarrow{\text{Prolongation}} & P(\xi) \end{array}$$

TABLE 1 – Borel-Laplace summation

4 Résultats numériques

Dans un premier test, on étudie la dynamique de trois tourbillons rapprochés. La figure 1 présente l'écoulement à $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$ et $t = 40$ secondes.

Dans un deuxième test, on simule l'évolution d'un tube de tourbillons qui entrent en collision. On montre dans la figure 2 l'évolution de l'énergie et du taux de dissipation. On présentera plus de détails lors de la communication.

Références

- [1] Curtiss C.F. and J.O Hirschfelder. Integration of stiff equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(3) :235–243, 1952.

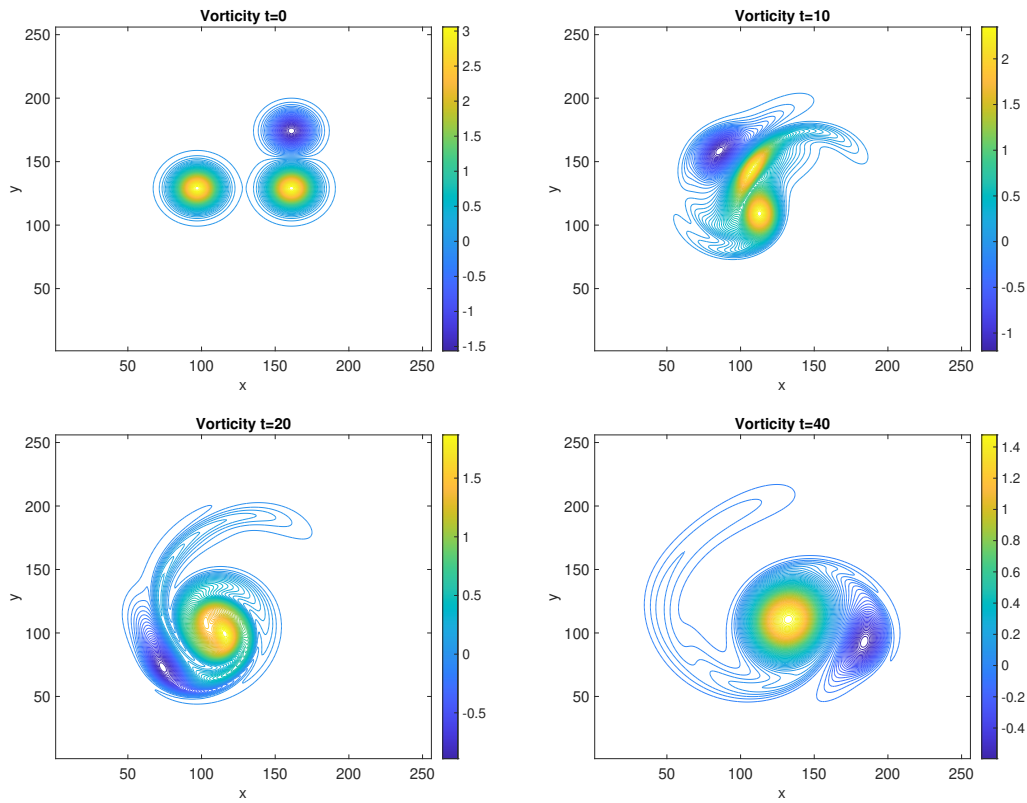


FIGURE 1 – Vorticity contour, for $\nu = 1.8182 \times 10^{-5}$ and $j = 8$

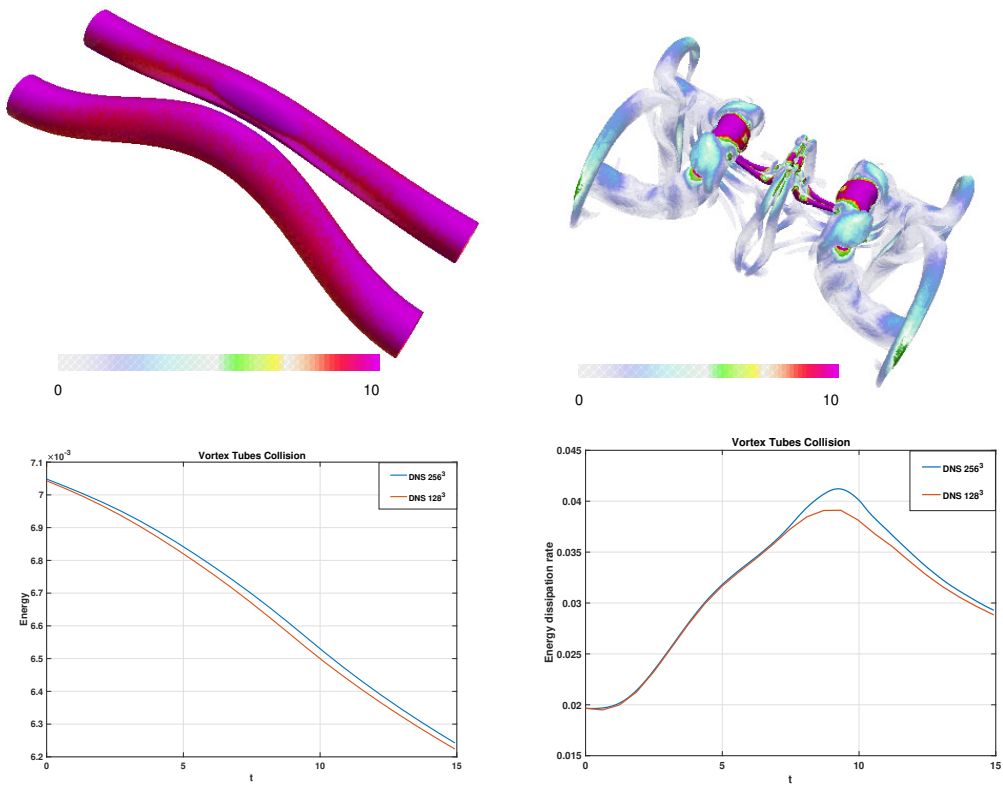


FIGURE 2 – Evolution of the energy and its dissipation rate, $\nu = 4.5473 \times 10^{-5}$

- [2] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition, 1996.
- [3] C. Runge. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46 :167–178, 1895.
- [4] J.C. Butcher. A history of Runge-Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, 20(3) :247–260, 1996.
- [5] E. Fehlberg. Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. *Computing*, 6(1) :61–71, Mar 1970.
- [6] A. Iserles. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2nd edition, 2008.
- [7] S. Cox and P. Matthews. Exponential time differencing for stiff systems. *Journal of Computational Physics*, 176(2) :430 – 455, 2002.
- [8] Bertille Claude, Grégory Girault, Bruno Leblé, and Jean-Marc Cadou. On the use of an high order perturbation method for numerical time integration in structural dynamics. *Comptes Rendus. Mécanique*, 351 :227–245, 2023.
- [9] H. Vazquez-Leal, B. Benhammouda, U. Filobello-Nino, A. Sarmiento-Reyes, V.M. Jimenez-Fernandez, J.L. Garcia-Gervacio, J. Huerta-Chua, L.J. Morales-Mendoza, and M. Gonzalez-Lee. Direct application of padé approximant for solving nonlinear differential equations. *Springerplus*, 3, 2014.
- [10] D. Razafindralandy, V. Salnikov, A. Hamdouni, and A. Deeb. Some robust integrators for large time dynamics. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 6(1) :5, 2019.
- [11] A. Deeb, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Comparison between Borel-Padé summation and factorial series, as time integration methods. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Serie S*, 9(2) :393–408, 2016.
- [12] A. Deeb, A. Hamdouni, and D. Razafindralandy. Performance of Borel-Padé-Laplace integrator for the solution of stiff and non-stiff problems. *Applied Mathematics and Computation*, 426 :127118, 2022.
- [13] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, and C. Allery. Numerical divergent series resummation in fluid flow simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, 17(4) :431–451, 2008.
- [14] Ahmad Deeb and Denys Dutykh. Stabilized time-series expansions for high-order finite element solutions of partial differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 153(2) :e12708, 2023.
- [15] Albert Cohen. *Numerical analysis of wavelet methods*, volume 32 of *Studies in mathematics and its applications*. North-Holland, 2003.
- [16] A. Jouini and P. G. Lemarié-Rieusset. Analyse multirésolution biorthogonale sur l’intervalle et applications. *Ann. Inst. H. Poincaré C*, 10 :453–476, 1993.
- [17] P. G. Lemarié-Rieusset. Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 8 :221–236, 1992.
- [18] S. Kadri-Harouna and V. Perrier. Effective construction of divergence-free wavelets on the square. *J. Comput. Appl. Math.*, 240 :74–86, 2013.
- [19] R. Stevenson. Divergence-free wavelet bases on the hypercube : Free-slip boundary conditions, and applications for solving the instationary stokes equations. *Math. Comput.*, 80 :1499–1523, 2011.
- [20] K. Urban. Using divergence-free wavelets for the numerical solution of the stokes problem. In *AM-LI’96 : Algebraic Multilevel Iteration Methods with Applications*, volume 2, pages 261–277, University of Nijmegen, The Netherlands, 1996.
- [21] P. Monasse and V. Perrier. Orthogonal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29 :1040–1065, 1998.
- [22] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 :54–81, 1993.
- [23] J.L. Guermond, P. Minev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :6011–6045, 2006.
- [24] A. J. Chorin. Numerical simulation of the navier-stokes equation. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.
- [25] R. Temam. Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires ii. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.
- [26] R Temam. Remark on the pressure boundary condition for the projection method. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(3) :181–184, 1991.

- [27] Rolf Rannacher. On chorin's projection method for the incompressible navier-stokes equations. In *The Navier-Stokes Equations II—Theory and Numerical Methods : Proceedings of a Conference held in Oberwolfach, Germany, August 18–24, 1991*, pages 167–183. Springer, 2006.
- [28] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [29] S. Kadri-Harouna and V. Perrier. Divergence-free wavelet projection method for incompressible viscous flow on the square. *SIAM, Multiscale Modeling & Simulation*, 13(1) :399–422, 2015.
- [30] E. Borel. *Leçons sur les séries divergentes*. J. Gabay, 1928.
- [31] J-P. Ramis. Poincaré et les développements asymptotiques (première partie). *Gazettes des Mathématiciens*, 133 :34–72, 2012.
- [32] J-P. Ramis. Les développements asymptotiques après Poincaré : continuité et... divergences. *Gazettes des Mathématiciens*, 134 :17–36, 2012.