

Simulation d'écoulement dans les interfaces de contact : le rôle de la rugosité

V.A. Yastrebov¹, G. Anciaux², J.F. Molinari²

¹ Centre des matériaux, Mines Paris - PSL, CNRS UMR 7633, Versailles, France. vladislav.yastrebov@minesparis.psl.fr

² Institute of Civil Engineering, Institute of Materials Science and Engineering, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL),

Lausanne, Suisse. guillaume.anciaux@epfl.ch, jean-francois.molinari@epfl.ch

Licence : CC BY 4.0, © Auteurs, 2025.

Résumé — Les interfaces de contact ne sont d'habitude pas étanche à cause de la rugosité. La transmissivité des interfaces dépend donc des aspects géométrique des surfaces et du chargement. Nous présentons le chainage des codes traitant la génération de la rugosité, la résolution du problème de contact par un solveur basé sur la FFT et du problème d'écoulement en couche mince par la différence finis et les volumes finis. La contribution principale est un cadre cohérent numérique ainsi que le développement des modèles phénoménologique pour l'écoulement compressible et incompressible.

Mots clés — étanchéité, écoulement en couche mince, contact, rugosité, FFT, différences finis.

1 Introduction

Les systèmes d'étanchéité jouent un rôle déterminant dans de nombreux domaines industriels, en particulier dans les secteurs de l'énergie (fission et fusion) ainsi que dans l'aérospatial, où les conditions de fonctionnement sont extrêmes. Les performances requises y dépassent largement celles des applications conventionnelles : un exemple emblématique est fourni par le réacteur de fusion ITER, dont les joints doivent garantir des taux de fuite inférieurs à $10^{-11} \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$ (cette unité, standard en technologie du vide, exprime le débit en termes de pression-volume par unité de temps), une exigence record pour un système non circulaire de grande dimension. Dans ces environnements, l'étanchéité conditionne la sûreté, la stabilité opérationnelle et la longévité des installations, tandis que les défaillances peuvent entraîner des pertes d'efficacité majeures ou des risques de sécurité critiques. La conception de solutions robustes exige donc une compréhension fine des mécanismes physiques intervenant à l'échelle microscopique et leur intégration cohérente dans des modèles prédictifs fiables.

Pour atteindre ce niveau de performance, il est indispensable de résoudre le problème d'étanchéité dans toute sa complexité : nature multi-échelle de la rugosité des surfaces en contact, interactions mécaniques non linéaires, couplages hydromécaniques et phénomènes de percolation contrôlant la transmissivité. Les hétérogénéités géométriques à l'échelle micrométrique et les écoulements confinés dans des films nanométriques imposent des exigences élevées en précision numérique et en modélisation. L'élaboration de modèles prédictifs capables de reproduire ces phénomènes nécessite donc des méthodes haute-fidélité, tant pour la description des surfaces que pour la résolution des équations mécaniques et hydrodynamiques associées.

Dans cette étude, nous développons un cadre numérique robuste et performant permettant de prédire la performance d'étanchéité de surfaces rugueuses mises en contact. Ce cadre comprend un solveur pour le problème de contact à l'échelle de la rugosité, un solveur pour l'écoulement en couche mince d'un fluide compressible ou incompressible, ainsi qu'un outil d'interfaçage assurant le transfert cohérent des données entre les deux. Les aspects numériques et physiques sont examinés conjointement. Les résultats obtenus permettent de mieux comprendre et de modéliser l'influence de la rugosité sur la transmissivité des interfaces de contact.

2 Problème à résoudre et la méthodologie

Soit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dont le bord est $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$, avec Γ_u (conditions de déplacement imposé), Γ_t (conditions de traction imposée \mathbf{t}_0), et Γ_c (zone de contact potentiel). On introduit l'espace \mathbb{U} et l'ensemble admissible \mathbb{K} comme

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_u \right\}, \quad \mathbb{K} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{U} \mid g_n(\mathbf{u}) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\},$$

où $g_n(\mathbf{u})$ désigne le gap normal qui doit rester non-négatif. On cherche $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$ tel que pour $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}$ et $\delta\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, \mathbf{u} vérifie l'inégalité variationnelle

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \cdot (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u})) d\Gamma_c \geq \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega,$$

où, à gauche, la première intégral représente la variation de l'énergie interne virtuelle, avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy et $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de petite déformation. Le second terme correspond à la dissipation due au frottement, où $\boldsymbol{\tau}$ désigne la composante tangentielle du vecteur de contrainte $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, donnée par $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}$ et représenté dans le repère local de surface $\partial\mathbf{x}/\partial\xi$. Le paramètre convectif $\boldsymbol{\xi}$, décrivant la position projetée sur le corps maître, est évalué en \mathbf{u} et \mathbf{v} . À droite apparaît le travail virtuel des efforts surfaciques \mathbf{t}_0 et des efforts volumiques \mathbf{f}_V .

Cette formulation en inégalité variationnelle [1], en absence de frottement, peut être vue comme un problème d'optimisation convexe pour laquelle il y a différentes méthodes de résolution existent. En présence de frottement, cette simplification n'est plus possible.

2.1 Formulation pour semi-espace élastique

Nous nous intéressons dans cette étude à un problème plus simple où les corps en contact sont deux semi-espaces élastiques isotropes présentant des surfaces géométriquement complexes. Ils sont amenés en contact par une pression p_0 appliquée à l'infini. Supposons que la surface de chaque corps peut être décrite par une fonction $z_i(x, y)$ et que la rugosité effective de l'interface est donnée par $z(x, y) = z_1(x, y) - z_2(x, y)$. Ce problème est équivalent [2] à celui du contact entre une surface rigide et rugueuse $z(x, y)$ et un semi-espace lisse de module effectif E^* [3].

Pour traiter ce problème en absence de frottement, nous adoptons la formulation d'optimisation proposée par Kalker [4], qui se réduit à la minimisation suivante :

$$p^*(\mathbf{x}) = \arg \min_{p \in \mathcal{K}} \mathcal{H}(p), \quad \mathcal{H}(p) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2} u(p; \mathbf{x}) + g_0(\mathbf{x}) \right) dS, \quad (1)$$

où Γ est la surface du semi-espace, $g_0(\mathbf{x})$ désigne le gap initial $p(\mathbf{x})$ est le champ de pression, et $u(p; \mathbf{x})$ le déplacement normal induit. Celui-ci est relié à $p(\mathbf{y})$ via l'opérateur intégral $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de flexibilité :

$$u(p; \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS. \quad (2)$$

L'espace admissible dans lequel la pression de contact est recherchée est défini par

$$\mathcal{K} = \left\{ p \in L^2(\Gamma) \mid p(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ presque partout sur } \Gamma \right\}.$$

Ce problème est classiquement appelé *minimisation de l'énergie complémentaire* ou *d'enthalpie*.

2.2 Approche FFT pour le problème de contact

L'opérateur intégral $C(\bullet, \bullet)$ dans (2) correspond à une matrice pleine et est difficile à manipuler. En adaptant l'approche FFT à une surface périodique en x, y de période L^1 , cet opérateur peut être représenté dans l'espace de Fourier [5, 6] sous la forme

$$u(p; \mathbf{x}) = \text{FFT}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{k}) : \text{FFT}(p(\mathbf{x}))), \quad (3)$$

1. Cette période doit représenter une surface élémentaire représentative tant du point de vue de la mécanique du contact que de l'écoulement du fluide

où FFT désigne la transformée de Fourier discrète et $\mathcal{F}(\mathbf{k}) = L/(\pi E^* \sqrt{k_x^2 + k_y^2})$ est l'opérateur de flexibilité en espace spectral. L'opération “:” indique un produit terme à terme pour tous les nombres d'onde $k_x, k_y \in \mathbb{Z}$.

Le problème d'optimisation (1) est ainsi évalué à l'aide de la convolution FFT (3) et peut être résolu par la méthode du gradient conjugué projeté [7, 6]. Cette formulation est implémentée dans le logiciel "open-source" haute performance *Tamaas* [8], que nous utilisons dans cette étude [9].

2.3 Modélisation de la rugosité

Pour générer des surfaces rugueuses auto-affines, nous utilisons la méthode de filtrage en espace de Fourier proposée par Hu et Tonder [10]. La rugosité est entièrement définie par quatre paramètres et une graine aléatoire : les nombres d'onde $k_l = 2\pi/\lambda_l$ et $k_s = 2\pi/\lambda_s$ correspondant aux coupures infrarouge et ultraviolette du spectre, l'amplitude Φ_0 et l'exposant de Hurst H . Dans un domaine carré périodique de côté L , ces coupures sont définies par $\lambda_l = L/n_l$ et $\lambda_s = L/n_s$ avec $n_l, n_s \in \mathbb{N}$.

La procédure est la suivante. On génère d'abord un bruit blanc w_{ij} sur un maillage $N \times N$ tel que $\langle w \rangle = 0$ et $\langle w^2 \rangle = \Phi_0$. Après transformation de Fourier discrète, on applique un filtre spectral auto-affine ne conservant que les modes vérifiant $k_l \leq k \leq k_s$ (ou $k \leq k_s$ en présence d'un plateau), et dont l'amplitude décroît selon une loi de puissance en dehors d'un éventuel plateau pour les basses fréquences :

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{k}\| < k_l, \quad \text{si avec plateau, sinon } 0 \\ \left(\frac{\|\mathbf{k}\|}{k_l}\right)^{-(1+H)}, & k_l \leq \|\mathbf{k}\| \leq k_s, \\ 0, & k > k_s. \end{cases}$$

Le champ filtré s'écrit alors $\hat{z}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{w}(\mathbf{k})$, puis une transformée de Fourier inverse fournit la surface rugueuse $z(x, y)$ (de partie imaginaire nulle par construction).

La densité spectrale de puissance (PSD) est donnée par $\Phi(\mathbf{k}) = \hat{z}(\mathbf{k}) \hat{z}^*(\mathbf{k}) = |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 |\hat{w}(\mathbf{k})|^2$. Comme le spectre du bruit blanc est uniformément distribué, on obtient en moyenne dans l'intervalle $[k_l, k_s]$:

$$\langle \Phi(\mathbf{k}) \rangle = \Phi_0 \left(\frac{\|\mathbf{k}\|}{k_l}\right)^{-2(1+H)} \quad \text{pour } k_l \leq \|\mathbf{k}\| \leq k_s,$$

et $\langle \Phi(\mathbf{k}) \rangle = 0$ ailleurs. Lorsque la surface obtenue est isotrope, la PSD dépend uniquement du nombre d'onde scalaire $K = \|\mathbf{k}\|$, ce qui conduit à

$$\langle \Phi(K) \rangle = \begin{cases} \Phi_0, & K < k_l \quad \text{si avec plateau, sinon } 0 \\ \Phi_0 (K/k_l)^{-2(1+H)}, & k_l \leq K \leq k_s, \\ 0, & K > k_s. \end{cases}$$

Cette expression correspond à la loi spectrale auto-affine visée, caractérisée par une décroissance en loi de puissance d'exposant $-2(1+H)$.

2.4 Solveur pour l'équation de Reynolds

Nous adoptons ici un couplage unilatéral entre le problème de contact et le problème d'écoulement, c'est-à-dire que la configuration obtenue à partir de la solution du problème de contact en absence de fluide, $g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})$, est utilisée comme donnée d'entrée pour l'équation de Reynolds. Les parois sont supposées immobiles, et le fluide s'écoule dans le champ d'ouverture imposé sous une différence de pression entre l'inlet et l'outlet, avec des conditions de périodicité dans la direction orthogonale :

$$\begin{aligned} \text{équation de Reynolds :} & \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\frac{g^3(\mathbf{x})}{12\eta} \nabla q(\mathbf{x}), \\ \text{conditions aux limites :} & \quad p(x=0, y) = p_{\text{in}}, \quad p(x=L, y) = p_{\text{out}}, \\ \text{conditions de périodicité :} & \quad p(x, y=0) = p(x, y=L), \quad \mathbf{j}(x, y=0) = \mathbf{j}(x, y=L). \end{aligned} \tag{4}$$

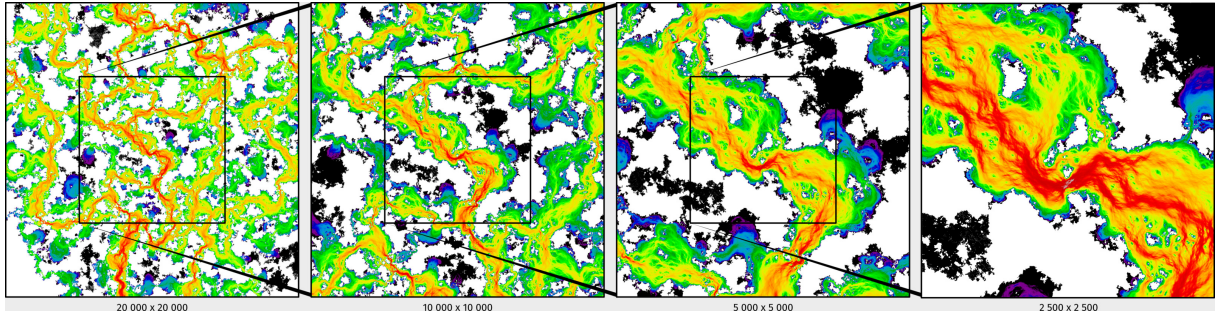


FIGURE 1 – Illustration des résultats obtenus avec le solveur `FDTransportCode` pour un problème d’écoulement incompressible dans l’interface de contact, résolu sur une grille $20\,000 \times 20\,000$ points. La couleur représente l’intensité du flux.

où j est le flux, g le champ d’ouverture, η la viscosité du fluide, et l’interprétation du champ scalaire $q(x)$ dépend du type de fluide :

- **fluide incompressible** : $q = p_f$, la pression du fluide ;
- **gaz idéal** : $q = p_f^2 / (RT)$, le carré de la pression normalisé par la température T et la constante universelle des gaz parfaits R .

La transmissivité normalisée effective est calculée comme :

$$K'_{\text{eff}} = -\frac{12\mu Q}{\sigma^3(p_{\text{in}} - p_{\text{out}})},$$

où Q est le flux intégral et σ est l’écart type de la surface rugueuse composite.

Pour résoudre l’équation (4), nous utilisons le solveur de différences finies open source `FDTransportCode` (<https://github.com/vyastreb/FDTransportCode>), disponible pour des grilles cartésiennes ou polaires. Le solveur est interfacé avec différents solveurs de systèmes linéaires tels que Pardiso, PETSc, MUMPS, etc. Un exemple de solution pour un fluide incompressible, obtenu sur une grille de $20\,000 \times 20\,000$ points, est présenté dans la figure 1.

Il est important toutefois de noter que, dans le cadre de ce couplage faible, les zones de fluide piégé ne sont pas prises en compte et sont éliminées lors de la construction de la grille. De plus, la pression et le cisaillement exercés par le fluide sur la paroi solide n’induisent aucune déformation de cette dernière. Pour intégrer ces effets, un couplage fort serait nécessaire, comme par exemple dans [11].

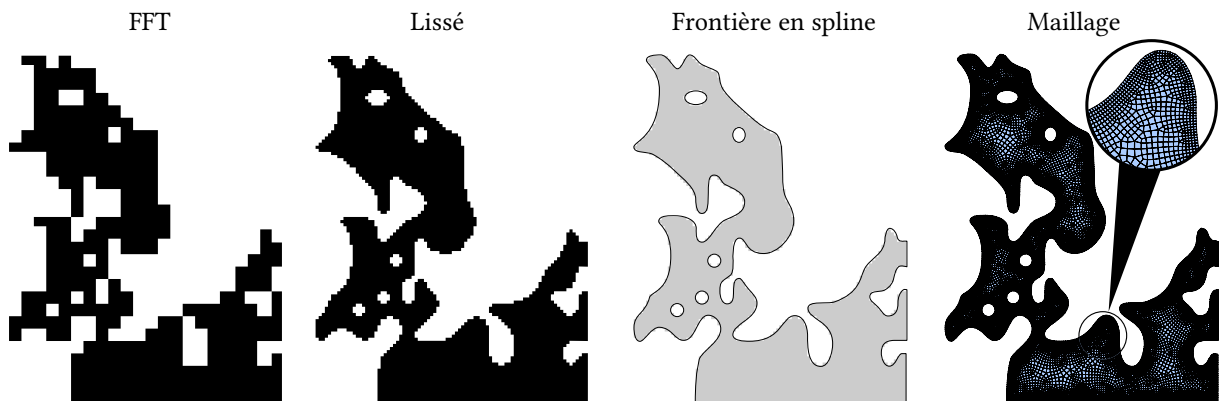


FIGURE 2 – Illustration du passage de la zone de contact (ou de non-contact) pixellisée issue du solveur FFT vers un maillage adapté à la méthode des volumes finis : (1) champ issu de la méthode FFT ; (2) lissage sub-pixel préservant la topologie ; (3) approximation de la frontière par des splines ; (4) maillage généré par `gmsh`.

2.5 Chaînage des logiciels

Le traitement d’un problème d’étanchéité à partir de données topographiques (provenant soit d’un modèle numérique, soit de mesures expérimentales) comporte plusieurs étapes et mobilise différents

logiciels et scripts. Pour résoudre les équations introduites ci-dessus, nous utilisons les outils suivants.

Pour le problème de contact ((1),(3)), nous recourons au solveur haute performance Tamaas (<https://tamaas.readthedocs.io/>) [8]. Les résultats issus de Tamaas peuvent être directement exploités par le solveur de différences finies `FDTransportCode` (<https://github.com/vyastreb/FDTransportCode>) pour résoudre l'équation de Reynolds (4).

Cependant, pour obtenir une précision supérieure, la carte pixellisée de la zone de fluide peut être transformée en un domaine géométriquement lisse, mieux adapté aux solveurs éléments finis ou volumes finis. La construction de cette carte lissée repose sur trois étapes supplémentaires, illustrées dans la figure 2 : (1) un lissage sub-pixel préservant la topologie [12], fondé sur des opérations de morphologie mathématique (<https://github.com/vyastreb/TopologicalSmoothing>); (2) l'interface ainsi lissée, mais encore pixellisée, sert de donnée d'entrée à un code construisant une frontière spline; (3) les algorithmes de `gmsh` [13] sont utilisés pour générer un maillage adapté et localement raffiné. Un solveur éléments finis ou volumes finis open source peut ensuite être appliqué pour obtenir une solution de haute précision.

3 Résultats

Une étude extensive, basée sur des surfaces modèles, a été menée à l'aide du chaînage logiciel décrit ci-dessus. Parmi les questions abordées, citons notamment :

- comment le contenu spectral des surfaces rugueuses, et en particulier la coupure haute fréquence k_s , influence la perméabilité de l'interface de contact ainsi que la limite de percolation ;
- dans quelle mesure le modèle de transmissivité fondé sur une homogénéisation auto-cohérente est en accord avec nos simulations numériques ;
- quels sont les paramètres clés permettant de prédire l'étanchéité, et quel modèle phénoménologique peut en être déduit ;
- quelle pression de contact est nécessaire pour atteindre la limite de percolation du contact, c'est-à-dire fermer tous les chemins possibles pour le fluide.

Les données collectées - champs de pression de fluide et de contact, champ d'ouverture, flux interfacial - ont permis une analyse détaillée incluant l'évaluation de la dispersion des résultats, en particulier pour la limite de percolation. Des champs de flux obtenus pour quatre valeurs croissantes de la pression appliquée, ainsi que l'évolution de la transmissivité, sont présentés dans la figure 3.

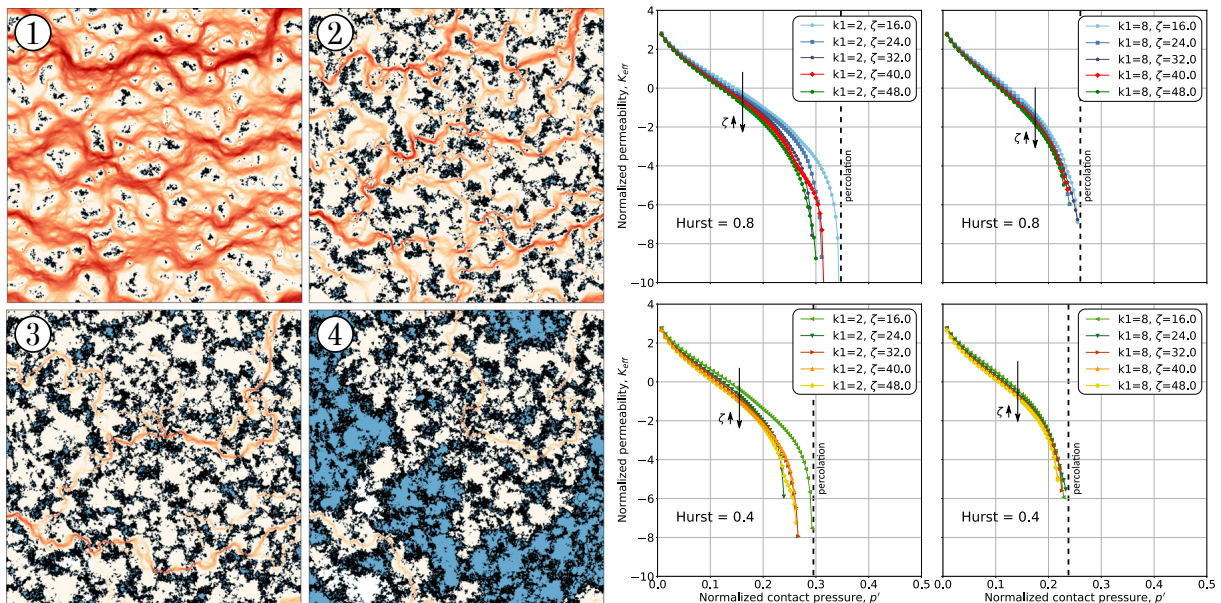


FIGURE 3 – À gauche : champs de flux pour quatre valeurs croissantes de la pression appliquée (de 1 à 4). Les zones noires correspondent aux zones de contact, les zones bleues aux zones de fluide piégé. À droite : transmissivité intégrale normalisée pour différents spectres, en fonction de la pression normalisée.

4 Applications

Dans le domaine de l'étanchéité, la transmissivité des interfaces de contact constitue un enjeu majeur, en particulier pour les interfaces métal-métal. Dans ces configurations, les surfaces en contact présentent, en plus de la rugosité à petite échelle, des profils de tournage conférant à la géométrie un caractère à la fois aléatoire et déterministe, ce qui rend l'hypothèse de séparation d'échelles plus délicate à appliquer.

La figure 4 illustre un exemple de calcul industriel utilisant une surface modèle combinant des stries de tournage superposées à une rugosité aléatoire. Dans la zone de contact, le champ d'ouverture laisse subsister certains chemins préférentiels le long desquels le fluide peut s'échapper de la chambre intérieure.

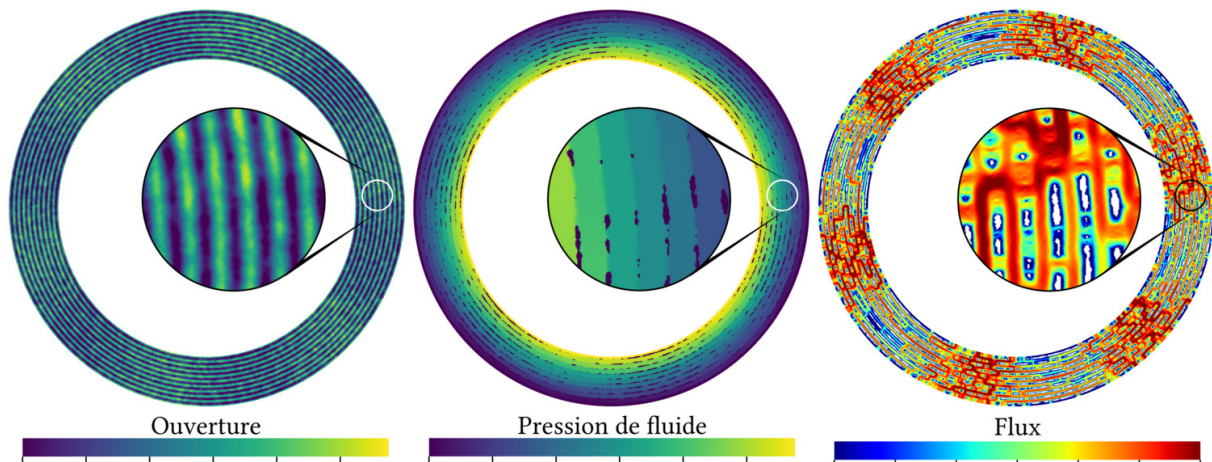


FIGURE 4 – Illustration d'un problème d'étanchéité pour une interface nominale axisymétrique présentant une superposition de rugosité et de stries de tournage (surface modèle). De gauche à droite, les cartes montrent le champ d'ouverture, la pression de fluide et le flux. Le maillage comporte 4,4 millions de degrés de liberté.

5 Conclusion et perspectives

La prochaine étape de cette étude consistera à intégrer le comportement élasto-plastique [14] et viscoélastique des matériaux en contact. Une autre amélioration majeure portera sur la prise en compte du mouvement relatif entre les surfaces en régime de lubrification mixte [15]. Cette extension nécessitera le couplage de trois modèles au sein de l'interface : l'équation de Reynolds, un modèle de frottement dans les zones de contact (lubrification limite) et un modèle de cavitation. Le développement de ces éléments est actuellement en cours.

L'aboutissement de ces deux axes de recherche permettra de construire de nouvelles lois d'écoulement et de lubrification tenant compte des effets fins de la rugosité. De plus, ce cadre ouvrira la voie à une caractérisation plus rigoureuse des incertitudes du modèle, enjeu majeur pour des applications critiques telles que le nucléaire et le secteur aérospatial.

Références

- [1] G. Duvaut and J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer, 1976.
- [2] J.R. Barber. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2029) :53–66, 2003.
- [3] K.L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [4] J.J. Kalker. Variational principles of contact elastostatics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 20(2) :199–219, 1977.
- [5] H.M. Stanley and T. Kato. An fft-based method for rough surface contact. *Journal of tribology*, 119(3) :481–485, 1997.

- [6] I.A. Polonsky and L.M. Keer. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear*, 231(2) :206–219, 1999.
- [7] D.P. Bertsekas. Nonlinear programming. *Journal of the Operational Research Society*, 48(3) :334–334, 1997.
- [8] L. Frérot, G. Anciaux, V. Rey, S. Pham-Ba, and J.F. Molinari. Tamaas : a library for elastic-plastic contact of periodic rough surfaces. *Journal of Open Source Software*, 5(51) :2121, 2020.
- [9] V.A. Yastrebov, G. Anciaux, and J.F. Molinari. The role of the roughness spectral breadth in elastic contact of rough surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 107 :469–493, 2017.
- [10] Y. Z. Hu and K. Tonder. Simulation of 3-D random rough surface by 2-D digital filter and fourier analysis. *Int J Mach Tool Manu*, 32 :83–90, 1992.
- [11] A.G. Shvarts, J. Vignollet, and V.A. Yastrebov. Computational framework for monolithic coupling for thin fluid flow in contact interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 379 :113738, 2021.
- [12] M. Couprie and G. Bertrand. Topology preserving alternating sequential filter for smoothing two-dimensional and three-dimensional objects. *Journal of Electronic Imaging*, 13(4) :720–730, 2004.
- [13] C. Geuzaine and J.F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [14] L. Frérot, M. Bonnet, J.F. Molinari, and G. Anciaux. A fourier-accelerated volume integral method for elastoplastic contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 351 :951–976, 2019.
- [15] A. Francisco and N. Brunetière. Full and hybrid multiscale lubrication modeling. *Lubricants*, 10(12) :329, 2022.