

# Éléments finis résilients – TFEM : Calcul numérique en présence de slivers

A. Quiriny<sup>1</sup>, T. Leyssens<sup>1</sup>, J. Lambrechts<sup>1</sup>, N. Moës<sup>1</sup>, J.-F. Remacle<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université catholique de Louvain, Institut de Mécanique, des Matériaux et du Génie Civil, Avenue Georges Lemaître 4, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

**Résumé** — La triangulation de Delaunay en 3D génère inévitablement des slivers, éléments très aplatis dont la contribution aux matrices de raideur éléments finis devient numériquement catastrophique. Même après optimisation, certains persistent et peuvent induire un verrouillage sévère. La *Tempered Finite Element Method* (TFEM) borne analytiquement la partie singulière de leur matrice de raideur, ce qui restaure stabilité, coercivité et convergence optimale, même sur des maillages fortement détériorés.

**Mots clés** — Génération de Maillages, Tempered Finite Element Method.

## 1 Introduction

Les techniques de génération automatique de maillages tétraédriques en trois dimensions sont basées presque exclusivement sur la triangulation de Delaunay : on peut générer aujourd'hui des maillages de plusieurs centaines de millions d'éléments en quelques minutes pour des géométries industrielles complexes [1]. Alors qu'en deux dimensions la triangulation de Delaunay possède une propriété géométrique intéressante – la condition MaxMin – qui garantit la qualité des triangulations, aucune propriété analogue n'existe en 3D. Le *sliver* (Figure 1 – gauche) est considéré comme l'ennemi juré des éléments finis. Un sliver possède un volume extrêmement faible tout en conservant des arêtes de taille  $O(h)$  où  $h$  est la taille de maille.

La présence de *slivers* est inévitable dans les triangulations de Delaunay 3D (Figure 1 – droite). En pratique, une grande partie des slivers peut être éliminée dans une étape de post-processing : retournements d'arête [2], repositionnement des noeuds, optimisations SPR[3] ou MFRC[4]. Il est facile d'éliminer la plupart des slivers mais les éliminer tous est non seulement coûteux mais souvent impossible. Notre point de vue est qu'une méthode d'éléments finis moderne devrait être résiliente à la présence de quelques dizaines de slivers noyés dans un maillage contenant des millions de tétraèdres. C'est ce que nous allons développer ici.

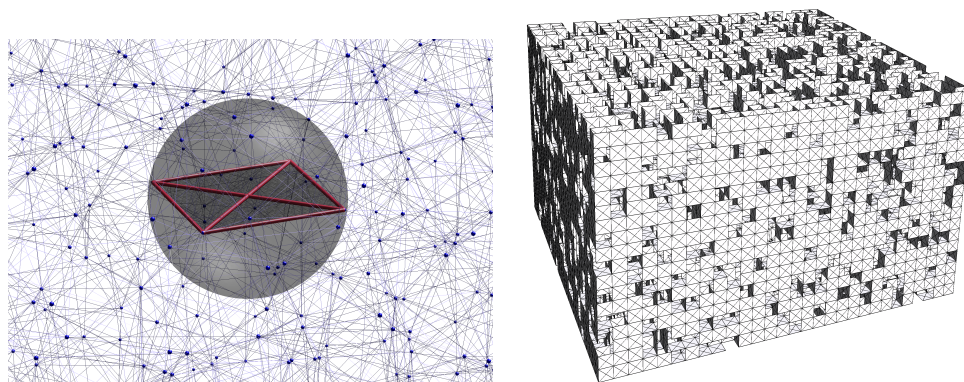


FIGURE 1 – À gauche, on représente un sliver dans une triangulation de Delaunay – sa sphère circonscrite est vide. À droite, on représente uniquement les slivers contenus dans la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points structurés sur une grille.

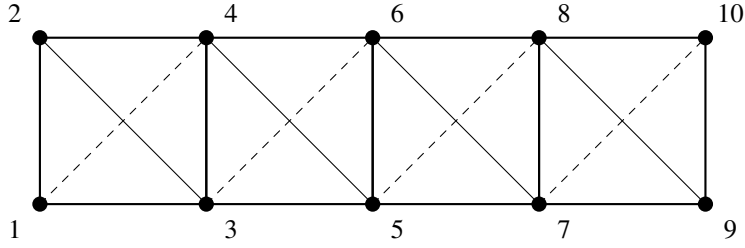


FIGURE 2 – Une bande de slivers

## 2 Sliver isolé et bandes de slivers.

Un sliver isolé ne pose pas de problème particulier [5]. Il suffit de lui donner un volume très petit pour retrouver la convergence optimale des éléments finis. Le véritable problème émerge lorsque les slivers ne sont plus isolés mais organisés en *bandes*, créant ainsi un phénomène de verouillage. Pour illustrer ce phénomène, considérons un sliver particulier avec ses quatre noeuds :

$$\mathbf{x}_1 = (-h, -h, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (-h, h, \varepsilon), \quad \mathbf{x}_3 = (h, h, 0), \quad \mathbf{x}_4 = (h, -h, \varepsilon).$$

La matrice de raideur associée au Laplacien (éléments finis P1) s'écrit

$$K = \underbrace{\frac{h^2}{3\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{K^{(1/\varepsilon)}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K^{(\varepsilon)}}.$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le déterminant du jacobien s'annule ( $J = 8h^2\varepsilon \rightarrow 0$ ) et la matrice de raideur devient non calculable. La matrice  $K^{(1/\varepsilon)}$  est de rang 1 : elle ne possède qu'une seule valeur propre non nulle :

$$K^{(1/\varepsilon)} = Q \operatorname{diag}(4, 0, 0, 0) Q^\top = 4\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\top.$$

Les slivers introduisent donc un seul mode à énergie infinie, qui ne peut pas apparaître dans la solution éléments finis. Quand le sliver est isolé, il suffit de choisir  $0 < \varepsilon \ll h$  (par exemple  $\varepsilon = 10^{-12}h$ ) pour retrouver une solution éléments finis convergente. En procédant ainsi, l'élément plat agit comme une contrainte locale sur la solution, empêchant l'activation du mode d'énergie infinie. Le mode d'énergie infinie est toujours bien présent dans la matrice élément fini, mais la solution s'adapte pour l'éviter. Cette *adaptation* de la solution correspond simplement au respect des conditions imposées par la matrice. Par exemple, si  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$  sont les quatre valeurs d'un champ P1 aux noeuds du sliver, alors la solution éléments finis satisfait

$$u_1 + u_3 = u_2 + u_4. \quad (1)$$

Si le sliver n'est pas parfaitement régulier, la même conclusion s'applique : la solution doit prendre la même valeur aux milieux des deux arêtes qui se croisent à l'intérieur du sliver.

Considérons maintenant la bande de slivers de la Figure 2. On note  $u_i$  la valeur de la solution éléments finis en chaque point  $i$ . Fixons les valeurs  $u_1, u_3, u_5, u_7$  et  $u_9$  aux noeuds inférieurs. Il reste un degré de liberté — fixons donc également  $u_2$ . Alors, tous les autres noeuds sont verouillés :

$$\begin{aligned} u_4 &= u_3 + (u_2 - u_1), & u_6 &= (u_4 + u_5) - u_3 = u_5 + (u_2 - u_1), \\ u_8 &= u_7 + (u_2 - u_1), & u_{10} &= u_9 + (u_2 - u_1). \end{aligned}$$

La solution dans les noeuds supérieurs est donc identique à celle des noeuds inférieurs, simplement translatée d'une constante égale à  $u_2 - u_1$ . C'est exactement ce que l'on appelle un phénomène de *verouillage*. Dans le cas d'une bande de slivers, la méthode des éléments finis ne peut pas converger.

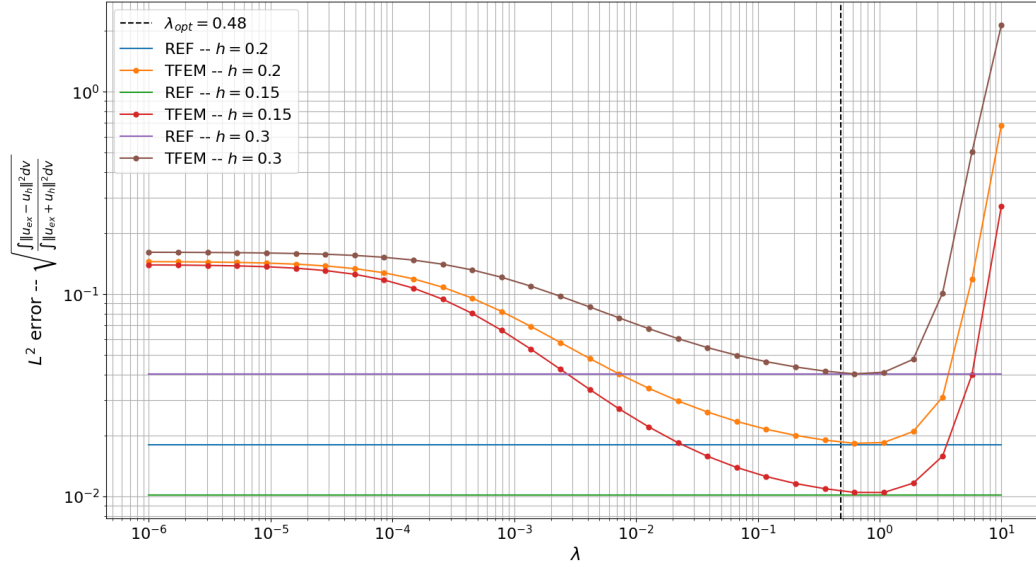


FIGURE 3 – L’erreur en norme  $L^2$  de l’approximation par éléments finis pour la solution manufacturée sur trois maillages différents, pour une large gamme de valeurs de  $J_{\min} = \lambda h^4$ .

### 3 Stabilisation avec TFEM

Le *Tempered Finite Element Method* (TFEM) [6] fournit un cadre mathématique permettant de traiter explicitement cette dégénérescence. Il ne s’agit pas d’une modification du maillage mais bien d’une modification mineure du solveur élément fini afin d’être robuste à la présence d’éléments exactement dégénérés. L’idée centrale est d’identifier, dans la matrice de raideur élémentaire, la contribution singulière provenant du mode de sliver, et de la remplacer par une version bornée dès que le jacobien local descend sous un seuil :

$$K \simeq D \frac{8h^4}{3J} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec (voir [6])

$$D = \frac{J}{\max(J, J_{\min})} \quad \text{et} \quad J_{\min} = h^4 \frac{|u|_{W^{2,\infty}(\mathcal{B})}}{|u|_{W^{1,\infty}(\mathcal{B})}} \sqrt{\frac{3C_c}{8}}. \quad (2)$$

La constante  $C_c$  est issue de la théorie classique de l’interpolation : soit  $K$  un simplexe de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\Pi_K u$  l’interpolant affine de  $u$  sur  $K$ . Il existe une constante  $C_c > 0$ , indépendante de  $K$  et de  $u$ , telle que

$$\|u - \Pi_K u\|_{W^{1,\infty}(K)} \leq C_c R_K \|u\|_{W^{2,\infty}(K)},$$

où  $R_K$  désigne le rayon de la sphère circonscrite au simplexe  $K$ . En dimension 1, on trouve facilement  $C_c = 1$ . On va garder  $C_c = 1$  en dimension 3 par facilité (et parce que ça marche en pratique).

Nous considérons maintenant un test de résistance particulièrement sévère. L’idée est de résoudre un problème avec une solution manufacturée — nous souhaitons résoudre une équation de Poisson

$$-\nabla^2 u = -\nabla^2 f,$$

où  $f(x, y, z) = \sin(\pi x/4) \sin(\pi y/4) \sin(\pi z/4)$  est la solution manufacturée. Si on résout ce problème de Poisson avec comme conditions de Dirichlet  $u = f$ , alors la solution exacte est évidemment  $u = f$  partout dans le domaine. Dans ce cas particulier

$$\frac{|u|_{W^{2,\infty}(\mathcal{B})}}{|u|_{W^{1,\infty}(\mathcal{B})}} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad J_{\min} = h^4 \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{8}} \simeq 0.48 h^4.$$

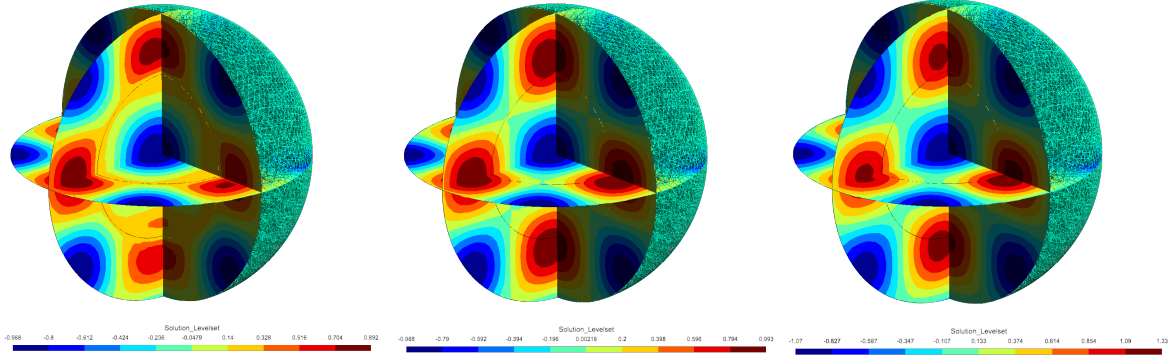


FIGURE 4 – Maillage avec  $h = 0.2$ . Solution manufacturée pour  $\lambda = 10^{-8}$  (gauche, verouillage présent, solution constante sur la sphère intérieure),  $\lambda = 1$ . (centre, pas de locking, précision quasi-optimale) et  $\lambda = 10$  (droite, solution sans locking mais avec des sauts importants au travers de la sphère et des valeurs qui dépassent de 30% la solution analytique.

Dans cette expérience, nous résolvons le problème dans une sphère de rayon 3. À l'intérieur de cette sphère, nous insérons deux autres sphères concentriques à la première et ayant des rayons très proches :  $R_1 = 1$  et  $R_2 = 1.01$ . Nous générons ensuite un maillage des trois domaines volumiques et nous déplaçons tous les points situés sur la sphère de rayon  $R = 1.0$  vers la sphère de rayon  $R = 1.01$ . Tous les tétraèdres contenus dans le volume compris entre ces deux sphères sont donc dégénérés – avec des volumes négatifs et positifs très petits.

Nous avons résolu ce problème en faisant varier  $h$  (3 maillages uniformes avec  $h = 0.3, 0.2, 0.15$  et en utilisant  $J_{\min} = \lambda h^4$  avec  $10^{-6} \leq \lambda \leq 10$ . La Figure 3 montre que l'estimateur 2 trouvé dans [6] est très précis. La Figure montre que la valeur optimale de  $\lambda$  est bien indépendante de  $h$ , que quand  $\lambda$  est bien choisi, TFEM fournit une solution de qualité comparable à celle des éléments finis standard et finalement qu'on peut choisir  $\lambda$  dix fois plus petit ou dix fois plus grand que la valeur optimale et obtenir une solution tout à fait acceptable.

Quand  $\lambda \ll 1$ , le phénomène de verouillage apparait et la solution reste constante sur la sphère intérieure (voir Figure 4). Quand par contre on choisit un  $\lambda$  trop grand, on résoud le mauvais problème et la solution est fausse.

## 4 TFEM en mécanique du solide - résultats préliminaires en 2D

La déformation  $u$  d'un solide soumis à des charges mécaniques est définie par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \sigma(\varepsilon(u)) &= f && \text{dans } \Omega, \\ u &= u_D && \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma \cdot n &= t_N && \text{sur } \Gamma_N, \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $f$  les forces volumiques, et  $t_N$  les contraintes normales appliquées sur la partie  $\Gamma_N$  du bord. Le complémentaire du bord  $\Gamma_D$  est la zone où sont imposées les conditions aux limites de Dirichlet  $u_D$ .

Le tenseur de déformation infinitésimale  $\varepsilon$  est donné par :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T).$$

La relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur de déformation infinitésimale est supposée linéaire (modèle de Hooke) :

$$\sigma = C : \varepsilon,$$

où  $C$  est le tenseur d'élasticité en déformation plane dans notre cas.

Nous considérons le cas d'une poutre 2D verticale, encastée à sa base, sur laquelle une contrainte horizontale est appliquée sur la face supérieure. Trois maillages sont étudiés, chacun comportant une bande

de cap (élément avec un angle proche de  $180^\circ$ ) de plus en plus aplatie, avec des épaisseurs caractéristiques  $\bar{h} \sim 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ . Le problème d'élasticité linéaire présenté ci-dessus est résolu à l'aide d'éléments finis P1, avec et sans prise en compte de la méthode TFEM.

La Figure 5 illustre les résultats obtenus. On observe que le phénomène de *locking* induit par la bande de cap perturbe fortement la solution, en augmentant artificiellement la rigidité apparente de la poutre. Avec la TFEM, la solution obtenue est indépendante de cette bande d'éléments dégénérés.

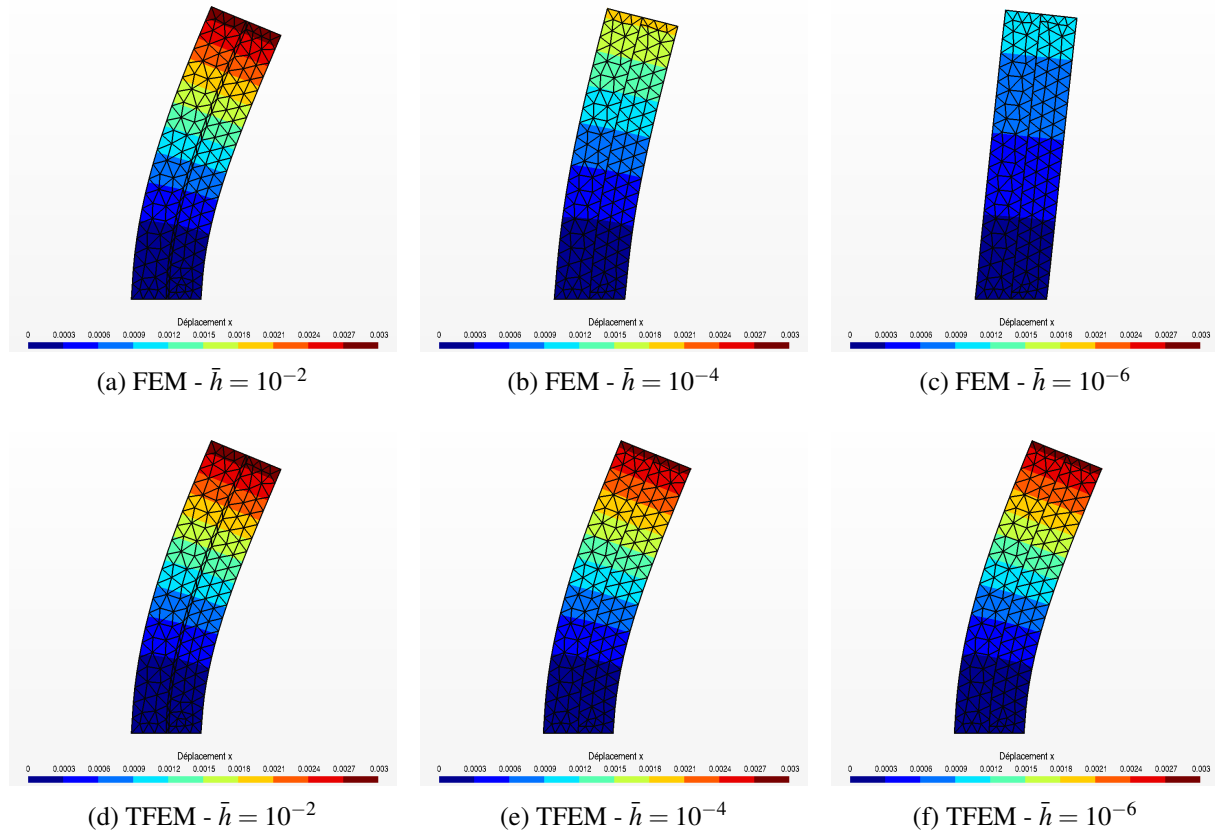


FIGURE 5 – Effet du maillage sur la déformation d’une poutre 2D avec les éléments finis classiques (au dessus) et avec TFEM

## 5 Conclusion

La présence inévitable de slivers dans les triangulations de Delaunay 3D constitue un défi majeur pour la stabilité et la précision des méthodes éléments finis classiques. Nous avons montré qu’un sliver isolé agit essentiellement comme une contrainte locale, mais que l’organisation de plusieurs slivers en bandes conduit à un verrouillage sévère, rendant la convergence impossible. La Tempered Finite Element Method (TFEM) fournit une réponse robuste à cette pathologie : en identifiant et en bornant analytiquement la contribution singulière associée au mode de sliver, elle restaure les taux de convergence optimaux, même sur des maillages fortement dégénérés [6].

Les résultats numériques présentés ici confirment la pertinence de l’estimation théorique de  $J_{\min}$  ainsi que la capacité de TFEM à maintenir une solution précise pour un large intervalle de valeurs du paramètre  $\lambda$ , tout en éliminant efficacement le phénomène de verrouillage. En mécanique du solide 2D, nos premières expériences montrent que TFEM corrige également l’augmentation artificielle de rigidité due aux bandes de cap, et permet de retrouver la réponse attendue du modèle élastique.

Dans la suite de ces travaux, nous prévoyons d’étendre l’approche TFEM à des cadres mécaniques plus complexes. En particulier, nous envisageons de tester la méthode sur des matériaux non linéaires, pour lesquels la sensibilité aux dégénérescences de maillage est encore plus critique, ainsi qu’en 3D avec des maillages présentant des slivers. Ces développements ouvriront la voie à une méthode d’éléments finis véritablement résiliente, capable de traiter de manière fiable les maillages les plus difficiles issus de

la génération automatique.

## Références

- [1] Célestin Marot, Jeanne Pellerin, and Jean-François Remacle. One machine, one minute, three billion tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 117(9) :967–990, 2019.
- [2] L. A. Freitag and C. Ollivier-Gooch. Tetrahedral mesh improvement using swapping and optimization-based smoothing. In *International Meshing Roundtable*, pages 407–415, 1997.
- [3] Célestin Marot, Kilian Verhetsel, and Jean-François Remacle. Reviving the search for optimal tetrahedralizations. In *Proceedings of the 28th International Meshing Roundtable*, 2019.
- [4] Yuzheng Ma and Monan Wang. An efficient method to improve the quality of tetrahedron mesh with mfrc (multi-face reconstruction). *Scientific Reports*, 11 :22802, 2021.
- [5] Václav Kučera. On necessary and sufficient conditions for finite element convergence. *arXiv preprint arXiv :1601.02942*, 2016.
- [6] Antoine Quiriny, Václav Kučera, Jonathan Lambrechts, Nicolas Moës, and Jean-François Remacle. The tempered finite element method. *arXiv preprint arXiv :2411.17564*, 2024.