

MigFlow: un solveur PFEM-DEM

Du sous-résolu au résolu, avec surfaces libres

M. Henry¹, T. Leyssens¹, S. Yans¹, F. Dubois², J. Lambrechts¹, V. Legat¹

¹ *Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, UCLouvain, Louvain-la-Neuve, Belgium,*
{ michel.henry, thomas.leyssens, simon.yans, jonathan.lambrechts, vincent.legat } @uclouvain.be

² *LMGC, CNRS, Univ. Montpellier, Montpellier, France, frederic.dubois@umontpellier.fr*

Résumé — *MigFlow* est un code de recherche pour les écoulements granulaires immergés, capable de traiter des surfaces libres et de grandes déformations grâce à une formulation semi-implicite couplant la méthode des éléments discrets (DEM) et la méthode des éléments finis en formulation eulérienne ou lagrangienne (FEM/PFEM). Ce formalisme flexible reproduit la dynamique des grains et les structures locales du fluide, d'une résolution grossière à fine. Des cas tests incluant instabilités de Rayleigh-Taylor, le tsunami de Lituya Bay et la sédimentation d'un cylindre illustrent sa précision et sa robustesse.

Mots clés — écoulements granulaires immergés, CFD-DEM, PFEM, multi-échelles.

1 Introduction

La modélisation numérique des écoulements granulaires immergés constitue un défi majeur en mécanique des fluides et des milieux divisés, en raison de la forte dépendance des phénomènes physiques à l'interaction dynamique entre les particules solides et la phase fluide. Cette problématique intervient dans un large éventail d'applications, allant de la dynamique des sédiments aux glissements de terrain immergés, en passant par les procédés industriels impliquant des suspensions denses. Pour comprendre et prédire ces systèmes, il est nécessaire de disposer d'outils numériques capables de capturer simultanément les échanges de quantité de mouvement, les réorganisations granulaires et les structures locales des écoulements.

Les approches existantes offrent plusieurs niveaux de fidélité. Les méthodes hybrides de type CFD-DEM, qui combinent une représentation discrète des grains avec une résolution macroscopique et continue du fluide, permettent d'explicitement les interactions grain-grain et grain-fluide et de reproduire des phénomènes complexes tels que l'agglomération, le blocage ou la ségrégation. La fluide est résolue à une échelle plus grande que l'écoulement autour du grain, on parle alors de description '*sous-résolues*' [1, 2, 3]. La taille de maille est choisie pour contenir au moins 5 grains. La majorité du coût de calcul se trouve alors dans la résolution du problème grains-grains qui augmente rapidement avec le nombre de particules et la complexité des interactions, ce qui limite leur applicabilité aux configurations de grande taille ou aux écoulements fortement denses. À une échelle plus fine, les méthodes dites '*résolues*' capturent l'écoulement autour de chaque grains mais restent aujourd'hui inapplicables aux systèmes multi-granulaires réalistes [4, 5]. Entre ces extrêmes, les approches '*semi-résolues*' apportent une alternative intéressante en permettant de reproduire partiellement les structures d'écoulement proches des particules grâce à l'utilisation de noyaux de lissage et de maillages de résolution comparable au diamètre des grains [6]. De même que l'approche sous-résolue, elles demeurent néanmoins contraintes par des limitations de stabilité, par des difficultés d'application dans des géométries complexes, et par une sensibilité marquée à la qualité des relations de fermeture employées.

Dans ce contexte, le logiciel de recherche *MigFlow* a été développé [7, 8]. Il combine la méthode des éléments discrets (DEM), couplé une résolution des contacts par la mécanique non régulière [9, 10], à une représentation moyennée de l'écoulement fluide par la méthode des éléments finis (FEM) [11]. Toutefois, la description moyennée du fluide repose sur des maillages dont la taille reste intrinsèquement liée au diamètre des particules, ce qui limite la capacité à traiter des géométries comportant des aspérités fines, ou encore des écoulements présentant de fortes déformations ou une surface libre.

Pour s'affranchir de tout rapport imposé entre la taille de maille et le diamètre des particules, nous

proposons une nouvelle stratégie de couplage semi-implicite fondée sur une intégration géométrique exacte des interactions fluide-grains sur le maillage [12]. La flexibilité apportée permet de traiter des géométries complexes et s'intègre naturellement dans le cadre de la méthode des éléments finis particulaires (PFEM) [13]. Elle permet ainsi de traiter des écoulements avec grandes déformations, interfaces fluide-air et changement topologique, ouvrant la voie à une modélisation unifiée couvrant aussi bien les régimes sous-résolus que les situations partiellement ou totalement résolues [14].

2 Un modèle numérique

Pour modéliser les écoulements granulaires immergés, une approche couplant la méthode des éléments discrets (DEM) pour la phase granulaire et la méthode des éléments finis (FEM/PFEM) pour la phase fluide est adoptée. La dynamique des grains suit la formulation non-régulière de la méthode des éléments discrets [8], tandis que la phase fluide est résolue via les équations de Navier-Stokes moyennées (VANS). Le couplage temporel est semi-implicite, et le couplage spatial repose sur une projection volumique des propriétés des grains sur le maillage fluide via une décomposition géométrique exacte, garantissant précision et coût maîtrisé. La figure 1 illustre une itération type entre les deux modules.

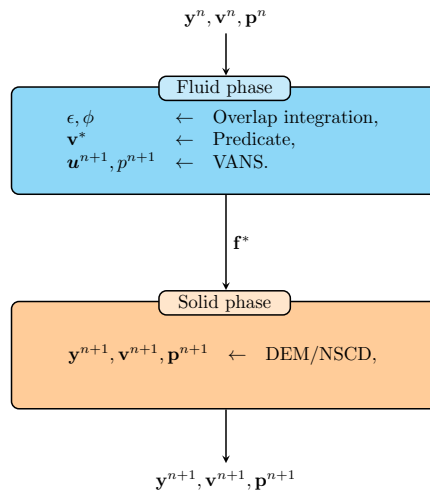


FIGURE 1 – Couplage semi-implicite entre le module CFD et le module DEM. La position des grains, leur vitesse et l'impulsion associée aux contacts sont transmises au solveur fluide. Celui-ci calcule la réponse du fluide, qui est ensuite renvoyée au module DEM pour la mise à jour des positions et vitesses des grains, tout en empêchant tout recouvrement des particules.

2.1 Dynamique du fluide

L'introduction de la phase granulaire est prise en compte dans les équations de conservation par un processus de moyennisation telle que proposée par Anderson et Jackson [11]. Une force additionnelle est introduite afin de modéliser à l'échelle du grain l'interaction fluide-grain, cette force est paramétrée sur base de la loi de Dallavalle et de la fonction de pore de Di Felice [15, 16]. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon \underline{u}) + \nabla \cdot (\phi \underline{v}) &= 0 \\ \rho_f \epsilon \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\epsilon \underline{\tau}) + \epsilon \rho_f \underline{g} - \underline{f} \end{aligned} \quad (1)$$

où ϵ est la fraction volumique de fluide, ϕ est la fraction volumique de grains, \underline{u} la vitesse du fluide, \underline{v} la vitesse des grains, p la pression, $\underline{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses, ρ_f la densité du fluide, \underline{g} le vecteur gravitationnel et \underline{f} la force d'interaction fluide-grain par unité de volume. Des fonctions de forme linéaires sont utilisées pour la discrétisation spatiale de la pression et de la vitesse. Afin d'éviter les modes parasites, une stabilisation de type PSPG est ajoutée au système [17]. Le schéma supporte une

représentation Lagrangienne, omettant donc le terme de convection car celle-ci est traité par l'advection des noeuds du maillage. Une équation est alors ajoutée pour le suivi de la position des noeuds :

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \underline{u} \quad (2)$$

où \underline{x} est la position des noeuds du maillage. Un schéma d'Adam-Bashford explicite d'ordre 2 est utilisé pour l'intégration temporelle de cette équation. Si une formulation Eulérienne est utilisée, le terme de convection est linéarisé et une stabilisation de type SUPG est ajoutée afin d'ajouter une diffusion numérique à haut Reynolds [18]. L'intégration temporelle est réalisée via un schéma d'Euler implicite. Le couplage temporelle avec les grains se fait de manière semi-implicite telle que décrit dans [14, 12]. La figure 2 illustre les représentations employées lors du couplage PFEM-DEM.

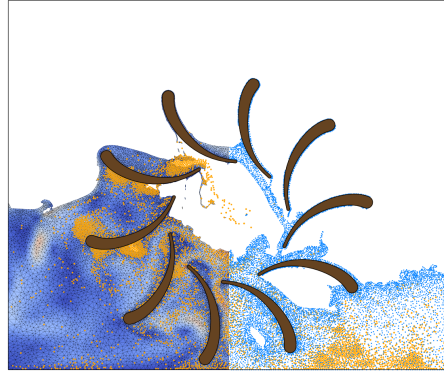


FIGURE 2 – Représentation du couplage PFEM-DEM. Les grains, dont la dynamique est résolue par la méthode des éléments discrets, sont représentés en orange. La phase fluide est résolue par la méthode des éléments finis particuliers (PFEM). A droite, les particules fluide sont représentées. A gauche, le maillage généré à chaque itération est visible. Figure issue de Leyssens et al. [14]

2.2 Le couplage fluide-grains

Comme les grains ne sont pas résolus par le maillage, une stratégie de couplage est nécessaire pour intégrer leur influence dans les équations de Navier-Stokes moyennées en volume (VANS), équations (1). Le transfert des quantités granulaires vers le fluide repose sur une projection volumique des propriétés des grains sur le maillage fluide. L'interaction fluide-grains est décrite par trois termes : la porosité ε (ou la fraction solide $\phi = 1 - \varepsilon$), le flux solide $\underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{v})$ et la force d'interaction $\phi \underline{f}$. La porosité ε représente la fraction de volume occupée par le fluide, la vitesse granulaire moyenne $\phi \underline{v}$ contribue à l'incompressibilité du mélange, et la force d'interaction \underline{f} assure l'échange de quantité de mouvement entre les deux phases. La phase fluide étant discrétisée par la méthode des éléments finis, une projection L^2 constitue un choix naturel pour réaliser ce couplage, ce qui conduit aux équations discrètes suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \tau dV &= \sum_p \int_{\Omega_p} \tau dV \\ \int_{\Omega} \phi \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \tau dV &= \sum_p \int_{\Omega_p} \underline{v}_p \cdot \underline{\nabla} \tau dV \\ \int_{\Omega} \phi \underline{f} \tau dV &= \sum_p \int_{\Omega_p} \underline{f}_p \tau dV \end{aligned} \quad (3)$$

où Ω est le domaine de calcul, Ω_p est le volume occupé par le grain p , τ est une fonction de test, \underline{v}_p est la vitesse du grain p et \underline{f}_p est la force d'interaction fluide-grain agissant sur le grain p . La force d'interaction par unité de volume est la résultante de la loi de constitution introduite précédemment et du

gradient de pression local, soit :

$$\underline{f}_{-p} = -\nabla p + \underline{f}_{-p}^{\text{drag}}, \quad \text{avec,} \quad \underline{f}_{-p}^{\text{drag}} = \underbrace{\varepsilon^{-2.8}}_{\text{Di Felice}} \underbrace{\left(0.77\sqrt{\varepsilon \text{Re}_d} + 5.88\right)^2 \frac{\mu}{d^2}}_{\text{Dallavalle}} (\underline{u} - \underline{v}_p) \quad (4)$$

avec $\text{Re}_d = \frac{\rho_f d |\underline{u} - \underline{v}_p|}{\mu}$ le nombre de Reynolds basé sur le diamètre des grains d , μ la viscosité dynamique du fluide et ρ_f la densité du fluide. Afin d'estimer les intégrales sur le volume occupé par chaque grain, une décomposition géométrique exacte est réalisée entre les grains et les éléments du maillage, comme illustré à la figure 3. Cette décomposition permet d'utiliser le centre de l'intersection comme point d'intégration, garantissant une intégration d'ordre 1. La projection pouvant générer des dépassements de la fraction volumique physique, la matrice de masse pour le calcul de la compacité, et donc de la porosité, est diagonalisée. Le champ de porosité ainsi obtenu est ainsi garanti positif et borné par l'unité, comme illustré à la figure 4.

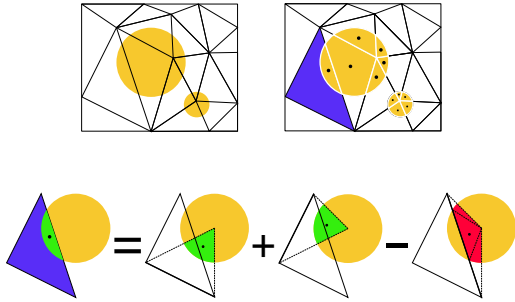


FIGURE 3 – Un grain est réparti sur l'ensemble des mailles intersectées, le centroid de l'intersection est utilisé comme point d'intégration.

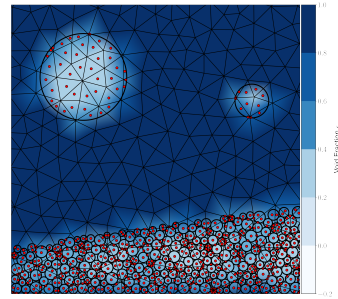


FIGURE 4 – La fraction volumique de fluide calculée est garantie positive et unitairement bornée, $\varepsilon \in [0, 1]$.

3 Un modèle, trois paradigmes

Le modèle développé est appliqué à trois configurations illustrant sa capacité à traiter des écoulements granulaires immergés dans des régimes variés : un écoulement dense, une surface libre et une résolution fine autour des grains. La première application concerne l'instabilité de Rayleigh-Taylor granulaire, illustrant la capacité du modèle à capturer les interactions complexes dans un écoulement dense. Le maillage utilisé est du même ordre de grandeur que le diamètre des grains, ce qui permet de reproduire partiellement les structures d'écoulement proches des particules. La seconde application porte sur la simulation d'un tsunami dans la baie de Lituya, mettant en évidence la capacité du modèle à gérer une surface libre et de grandes déformations du fluide. Enfin, la troisième application illustre la sédimentation d'un cylindre dans un fluide visqueux, démontrant la capacité du modèle à atteindre une résolution fine autour des grains malgré un maillage non-conforme.

3.1 L'instabilité de Rayleigh-Taylor granulaire : un écoulement dense

Lorsqu'un milieu granulaire dense est placé au-dessus d'un fluide léger dans une cellule de Hele-Shaw puis relâché, les grains chutent et forment des structures en doigts, un phénomène connu sous le nom d'*instabilité de Rayleigh-Taylor granulaire* [19]. Contrairement à l'instabilité fluide classique, où un large doigt se fragmente en structures plus fines [20], le système granulaire tend à produire un nombre limité de doigts dont la taille reste relativement stable. De nouveaux doigts apparaissent au centre des bulles d'air montantes lorsque celles-ci atteignent une largeur critique. Ce mécanisme est essentiel pour comprendre la formation et l'évolution des poches d'air. La figure 5 illustre la formation d'un arche de grains.

Le dispositif numérique suit les travaux expérimentaux et numériques de Vinningland et al. [21]. Les grains sont modélisés comme des disques de diamètre $d = 230 \mu\text{m}$ et de densité $\rho_p = 1050 \text{ kg/m}^3$, avec

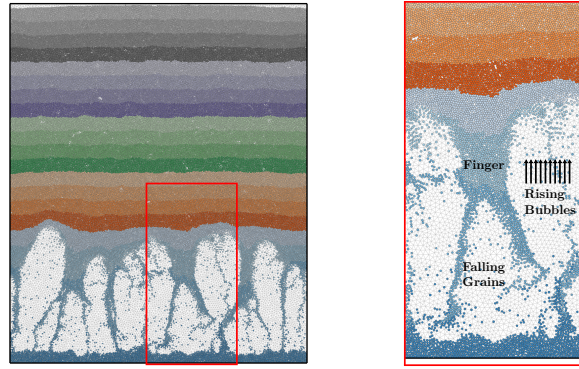


FIGURE 5 – Instabilité de Rayleigh-Taylor granulaire.

une légère polydispersité ($\lambda = 1.2$) et sans friction. L'air ambiant est caractérisé par $\rho_f = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et une viscosité dynamique $\eta = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pas}$. Le coût numérique est dominé par le solveur de contacts, ce qui rend l'augmentation de la résolution fluide peu pénalisante. Le modèle capture correctement les mécanismes physiques principaux, visible à la figure 6, notamment la formation des doigts et des arches de grains.

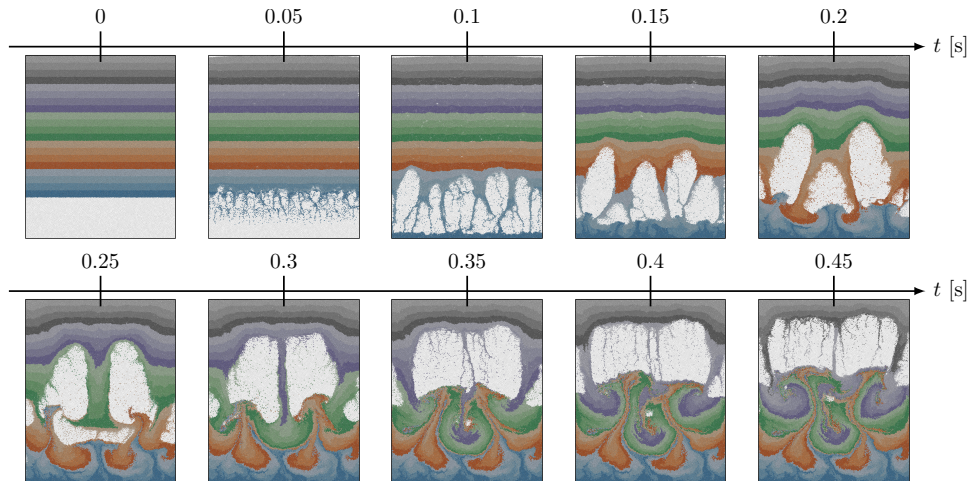


FIGURE 6 – États instantanés de l'instabilité de Rayleigh-Taylor dans un milieu granulaire. Le champ indique la position verticale initiale des grains.

3.2 Un tsunami dans la baie de Lituya : une surface libre

Pour tester la robustesse et la précision du modèle, nous simulons le glissement de terrain et le tsunami de la baie de Lituya (Alaska, 10 juillet 1958). Suite à un glissement de terrain massif généré par un séisme, une vague de 60 m a été produite, atteignant plus de 500 m sur la rive opposée. La génération de la vague et son impact sur la rive peuvent être modélisés comme un écoulement granulaire immergé avec une surface libre pour lesquels le couplage PFEM-DEM est particulièrement adapté. Les résultats sont comparés aux expériences à l'échelle 1:675 menées par Fritz et al. [22] pour quantifier l'événement. Les résultats numériques ici présentés font suite à la publication de Leyssens et al. [14].

Un arrangement dense de grains est initialement positionné sur le flanc de la baie et est laissé libre de glisser sous l'effet de la gravité. Lorsque les grains atteignent la surface de l'eau, ils transfèrent une grande quantité d'énergie cinétique au fluide, générant une onde qui se propage à travers la baie. La figure 7 présente des instantanés de la propagation de la vague à différents instants. L'amplitude de la surface libre est suivie en un point fixe, $x = 885 \text{ m}$, comme illustré à la figure 8. La comparaison avec les données expérimentales montre une bonne concordance, en particulier pour la hauteur maximale de la vague.

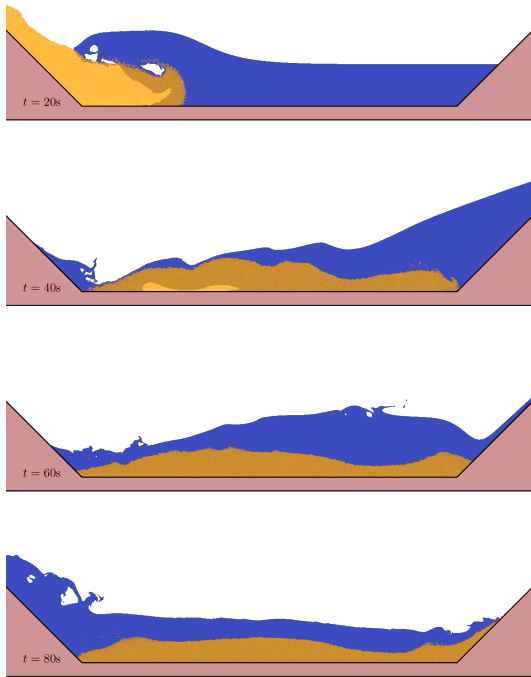


FIGURE 7 – Instantanés du tsunami dans la baie de Lituya, figure issue de Leyskens et al. [14]

3.3 La sédimentation d'un cylindre : une résolution fine

Pour valider le couplage fluide-solide dans le cas résolu, nous comparons nos résultats avec les données numériques de Namkoong et al. [23], qui ont étudié numériquement la chute d'un cylindre dans un fluide visqueux. Le cylindre est initialement au repos dans un fluide quiescent soumis à la gravité. Lors de la chute, le cylindre accélère jusqu'à atteindre une vitesse terminale $U_t = 2.501$ cm/s, correspondant à un nombre de Reynolds terminal $Re \approx 156$. La figure 9 indique le maillage non-conforme utilisé, tandis que la figure 10 présente l'évolution temporelle des composantes de vitesse normalisées du cylindre.

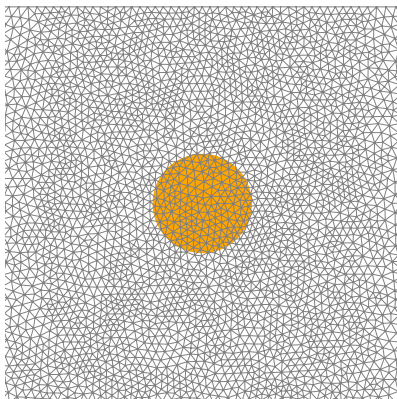


FIGURE 9 – Maillage non-conforme au cylindre.

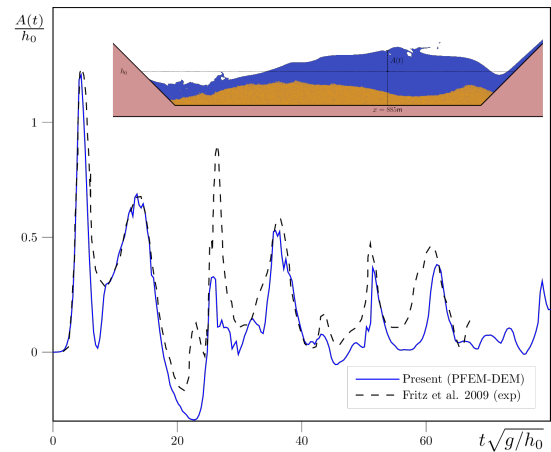


FIGURE 8 – Évolution de la surface libre en $x = 885$ m, figure issue de Leyskens et al. [14]

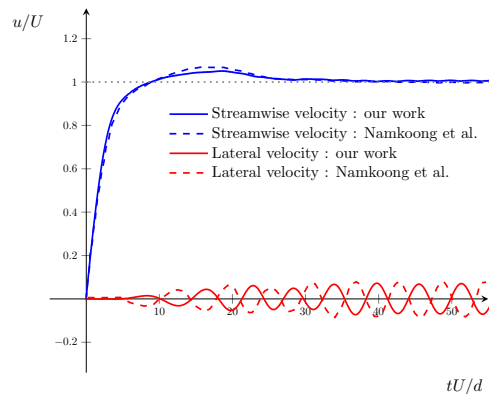


FIGURE 10 – Evolution de la vitesse de chute et latéral du cylindre.

L'évolution temporelle des composantes de vitesse normalisées est en concordance avec les résultats de Namkoong et al. La figure 11 présente des instantanés du champ de vorticité autour du cylindre à différents instants illustrant la génération des vortex. La composante latérale présente un comportement oscillatoire similaire, de signe opposé, lié aux conditions initiales et aux asymétries numériques. La fréquence et la longueur d'onde des oscillations sont cohérentes avec les données de référence. Ces résultats confirment que le couplage utilisé reproduit correctement les caractéristiques physiques essentielles de

la descente d'un corps rigide dans un fluide visqueux.

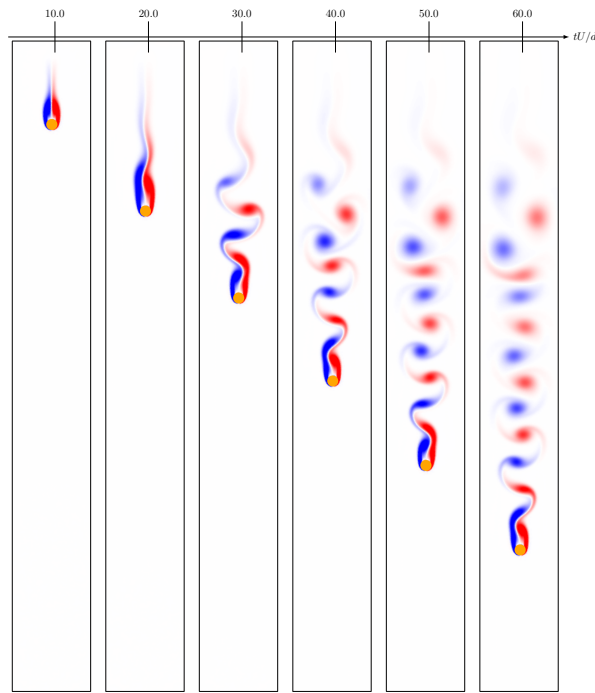


FIGURE 11 – Sédimentation d'un cylindre dans un fluide visqueux. Le champ de vorticité est représentée en couleur.

4 Conclusion

MigFlow constitue un cadre numérique unifié pour la simulation des écoulements granulaires immergés, capable de traiter simultanément surfaces libres, grandes déformations et régimes allant du sous-résolu au résolu. Le couplage semi-implicite PFEM-DEM, associé à une intégration géométrique exacte, garantit précision et robustesse dans l'analyse des interactions fluide-grains, même sur des maillages non-conformes et avec une formulation moyennée. Les applications présentées, instabilité de Rayleigh-Taylor granulaire, tsunami de Lituya Bay et sédimentation d'un cylindre, illustrent la capacité du modèle à reproduire fidèlement la dynamique des grains et les structures locales du fluide dans des configurations complexes, offrant un outil polyvalent pour la recherche et l'ingénierie. Bien que ces applications soient limitées à des configurations bidimensionnelles, le modèle est également implémenté en trois dimensions, ouvrant la voie à des études plus réalistes et détaillées des écoulements granulaires immergés. Par ailleurs, le calcul d'intersection peut être appliqué à des particules non sphériques, offrant une flexibilité supplémentaire pour la modélisation de grains de forme complexe. Précédemment, le coût numérique restait principalement dominé par le solveur de contacts DEM, rendant l'augmentation de la résolution fluide peu pénalisante. Les travaux futurs viseront à optimiser l'efficacité du code et à étendre ses capacités pour inclure des interactions plus complexes, telles que la cohésion entre particules, ainsi que le portage du code sur des architectures parallèles.

Références

- [1] Toni El Geitani, Shahab Golshan, and Bruno Blais. A high-order stabilized solver for the volume averaged Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 95(6) :1011–1033, 2023.
- [2] Daniel A. Clarke, Andrew J. Sederman, Lynn F. Gladden, and Daniel J. Holland. Investigation of Void Fraction Schemes for Use with CFD-DEM Simulations of Fluidized Beds. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 57(8) :3002–3013, February 2018.
- [3] CFD-DEM simulation of heat transfer in fluidized beds : Model verification, validation, and application | Elsevier Enhanced Reader.

- [4] Erik Burman and Miguel A Fernández. An unfitted nitsche method for incompressible fluid–structure interaction using overlapping meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279 :497–514, 2014.
- [5] A Piquet, Olivier Roussel, and Abdellah Hadjadj. A comparative study of brinkman penalization and direct-forcing immersed boundary methods for compressible viscous flows. *Computers & Fluids*, 136 :272–284, 2016.
- [6] Jesse Capecelatro and Olivier Desjardins. An Euler–Lagrange Strategy for Simulating Particle-Laden Flows. *Journal of Computational Physics*, 238 :1–31, April 2013.
- [7] Matthieu Constant, Frédéric Dubois, Jonathan Lambrechts, and Vincent Legat. Implementation of an Unresolved Stabilised FEM–DEM Model to Solve Immersed Granular Flows. *Computational Particle Mechanics*, September 2018.
- [8] Nathan Coppin, Michel Henry, Miguel Cabrera, Emilien Azéma, Frédéric Dubois, Vincent Legat, and Jonathan Lambrechts. Collapse dynamics of two-dimensional dry and immersed granular columns of elongated grains. *Physical Review Fluids*, 8(9) :094303, 2023.
- [9] Frédéric Dubois, Vincent Acary, and Michel Jean. The contact dynamics method : A nonsmooth story. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(3) :247–262, 2018.
- [10] Michel Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177(3-4) :235–257, 1999.
- [11] T. B. Anderson and Roy Jackson. Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 6(4) :527–539, November 1967.
- [12] Michel Henry, Laura Valentina Cote Martinez, Cristina Jommi, Michael Hicks, Jonathan Lambrechts, Vincent Legat, and Miguel Cabrera. A fem-dem model for immersed granular flows : From unresolved to semi-resolved scales. In *EPJ Web of Conferences*, volume 340, page 09016. EDP Sciences, 2025.
- [13] Eugenio Oñate, Sergio R Idelsohn, Facundo Del Pin, and Romain Aubry. The particle finite element method—an overview. *International Journal of Computational Methods*, 1(02) :267–307, 2004.
- [14] Thomas Leyssens, Michel Henry, Jonathan Lambrechts, Vincent Legat, and Jean-François Remacle. A coupled pfem-dem model for fluid-granular flows with free surface dynamics applied to landslides. *Journal of Computational Physics*, 537 :114082, 2025.
- [15] J. M. DallaValle and Alexander Klemm. *Micromeritics : The Technology of the Particles*. Pitman Publishing Corporation, New York ; Chicago, 1943.
- [16] R. Di Felice. The Voidage Function for Fluid-Particle Interaction Systems. *International Journal of Multiphase Flow*, 20(1) :153–159, February 1994.
- [17] T.E. Tezduyar, S. Mittal, S. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order interpolation velocity-pressure elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95 :221–242, 1992.
- [18] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 32(1-3) :199–259, 1982.
- [19] Jan Ludvig Vinningland, Øistein Johnsen, Eirik G Flekkøy, Renaud Toussaint, and Knut Jørgen Måløy. Experiments and simulations of a gravitational granular flow instability. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 76(5) :051306, 2007.
- [20] Geoffrey Ingram Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065) :192–196, 1950.
- [21] Jan Ludvig Vinningland, Øistein Johnsen, Eirik G Flekkøy, Renaud Toussaint, and Knut Jørgen Måløy. Size invariance of the granular rayleigh-taylor instability. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 81(4) :041308, 2010.
- [22] Hermann M Fritz, Fahad Mohammed, and Jeseon Yoo. Lituya bay landslide impact generated mega-tsunami 50 th anniversary. *Tsunami Science four years after the 2004 Indian ocean tsunami : Part II : Observation and data analysis*, pages 153–175, 2009.
- [23] Kak Namkoong, Jung Yul Yoo, and Hyoung G Choi. Numerical analysis of two-dimensional motion of a freely falling circular cylinder in an infinite fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 604 :33–53, 2008.