

Résolution de l'équation des milieux poreux avec l'approche eXtreme Mesh deformation (X-Mesh)

Alexandre Chemin¹, Jonathan Lambrechts², Nicolas Moës³, Jean-François Remacle⁴

¹ Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, alexandre.chemin@uclouvain.be

² Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, jonathan.lambrechts@uclouvain.be

³ Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, nicolas.moes@uclouvain.be

⁴ Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, jean-francois.remacle@uclouvain.be

Résumé — La simulation numérique de l'équation des milieux poreux (PME) est difficile en raison des propriétés spécifiques de ses solutions. Plus précisément, la PME présente une caractéristique distinctive : une interface dépendant du temps apparaît lorsque la solution initiale est nulle sur une partie du domaine spatial. Nous proposons ici d'exploiter l'approche *eXtreme Mesh deformation* (X-MESH), initialement développée pour les problèmes diphasiques, afin de calculer de manière efficace et précise des solutions de la PME, en suivant des interfaces franches et leurs éventuels changements de topologie sans qu'il soit nécessaire de remailler ou de modifier la topologie du maillage.

Mots clés — Interfaces franches, X-MESH, équation des milieux poreux, méthode des éléments finis.

1 Introduction

L'équation des milieux poreux (PME) est une équation aux dérivées partielles non linéaire qui présente un intérêt considérable en raison de sa large applicabilité à la modélisation de divers phénomènes physiques, tels que l'écoulement de gaz dans un milieu poreux, la dynamique des fluides incompressibles et le transfert de chaleur non linéaire [6]. Nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec d la dimension du problème ($d \in \{1, 2\}$), et une fonction scalaire $u \in C^0(\Omega \times [t_0, T])$.

La PME est définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa u^m \nabla u), \quad m > 0 \quad (1)$$

Dans cette équation, u est une fonction scalaire de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$ et du temps $t \in [t_0, T]$, et κu^m est homogène à un coefficient de diffusivité. La fonction u est fréquemment utilisée pour représenter des grandeurs physiques telles que la densité d'un gaz ou la température, ce qui impose la préservation de la non-négativité des solutions.

Le cas $m \rightarrow 0$ conduit à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla u) \quad (2)$$

La PME est parabolique partout où $u \neq 0$ et perd cette propriété lorsque $u = 0$. Il s'agit d'une équation parabolique dégénérée [6]. Contrairement aux solutions de l'équation de la chaleur, les solutions de la PME peuvent présenter une interface franche Γ séparant les régions où la solution est strictement positive de celles où elle est nulle. De plus, selon la solution initiale et la valeur de m , le gradient ∇u peut être discontinu à travers Γ .

Comme l'équation (1) n'est pas définie pour $u < 0$, on la réécrit généralement, pour faciliter la résolution numérique, sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa |u|^m \nabla u), \quad m > 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est appelée la PME signée. Résoudre (3) tout en garantissant la non-négativité de la solution sur l'ensemble du domaine Ω revient à résoudre (1). Les méthodes numériques classiques, telles que les méthodes éléments finis (FEM), se heurtent à d'importantes difficultés lorsqu'elles sont

appliquées à (3). La présence d'interfaces franches dans le domaine de solution engendre des oscillations parasites qui brisent la non-négativité.

Pour surmonter ces difficultés, nous proposons dans cet article d'utiliser la méthode X-MESH, spécifiquement conçue pour traiter des problèmes à interfaces franches dans le cadre des méthodes éléments finis. La méthode X-MESH a déjà démontré son efficacité dans des situations telles que le problème de Stefan ou les écoulements diphasiques [3, 5], où elle excelle à capturer des dynamiques d'interface complexes, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des éléments enrichis ni de modifier la topologie du maillage. Nous allons montrer que X-MESH constitue un outil précieux pour simuler avec précision la PME tout en contournant les limitations des approches FEM classiques.

2 L'équation des milieux poreux

Dans cette section, nous détaillons d'importantes propriétés de la PME ainsi que les méthodes à l'état de l'art pour sa résolution. Nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et une fonction donnée $u_0 \in C^1(\Omega)$ presque partout, telle que :

$$\begin{cases} u_0(\mathbf{x}) & \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) & = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4)$$

L'objectif est, pour des valeurs fixées $m > 0$ et $\kappa > 0$, de trouver u vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) & = \nabla \cdot (\kappa |u(\mathbf{x}, t)|^m \nabla u(\mathbf{x}, t)), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [t_0, T] \\ u(\mathbf{x}, t_0) & = u_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} & = 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T] \\ u(\mathbf{x}, t) & \geq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [t_0, T] \end{cases} \quad (5)$$

Comme déjà mentionné, les solutions de la PME peuvent présenter une interface franche séparant les régions où la solution est nulle de celles où elle est strictement positive. Par conséquent, les problèmes modélisés par la PME relèvent de la catégorie des problèmes *monophasiques*. Pour des raisons de clarté, nous définissons ici $\mathcal{P}_{u(t)} = \{\mathbf{x} \in \Omega \text{ tels que } u(\mathbf{x}, t) > 0\}$, $\Gamma_{u(t)} = \partial\mathcal{P}_{u(t)}$ et $Q_{u(t)} = \Omega \setminus (\mathcal{P}_{u(t)} \cup \partial\mathcal{P}_{u(t)})$. On appellera $\mathcal{P}_{u(t)}$ la *phase*, $\Gamma_{u(t)}$ l'*interface* et $Q_{u(t)}$ la *région vide* pour une solution donnée $u(t)$ sur Ω . La PME possède de nombreuses propriétés intéressantes et nous nous concentrerons sur deux d'entre elles qu'une simulation numérique doit être en mesure de préserver (voir [6] pour une liste plus exhaustive).

Conservation de la masse

Une propriété importante de la PME avec des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega$ est l'invariance en temps de la quantité $\int_{\Omega} u \, d\Omega$. Une démonstration générale peut être trouvée dans [6]. Dans le cas où la PME modélise un transfert de chaleur non linéaire, cela correspond à la conservation de l'énergie interne. Dans le cas où la PME modélise un écoulement gazeux en milieu poreux, cela correspond à la conservation de la masse. Par commodité, nous désignerons cette propriété sous le terme de conservation de la masse.

Solution de Barenblatt–Pattle

Un autre résultat important est l'existence d'une solution analytique de l'équation (3). Une solution de la forme :

$$u(\mathbf{x}, t) = t^{-\alpha} \left((C - k|\mathbf{x}|^2 t^{-2\beta})^+ \right)^{\frac{1}{m}} \quad (6)$$

avec $\alpha = \frac{d}{md+2}$, $\beta = \frac{\alpha}{d}$, $k = \frac{m\alpha}{2d}$.

où C est une constante arbitraire, est solution de la PME. Cette solution correspond à une condition initiale u_0 donnée par une distribution de Dirac, pour laquelle l'intégrale totale $\int_{\Omega} u_0 \, d\Omega = M(C)$ dépend de C . Pour cette solution, la localisation de l'interface est donnée par $f(t) = \left(\frac{C}{k}\right)^{\frac{1}{2}} t^{\beta}$.

Résolution de la PME par la méthode des éléments finis

Lors de la résolution de (5) par la méthode des éléments finis (FEM), la propriété de non-négativité est violée : des oscillations apparaissent dans toute la *région vide*. Un exemple de ce phénomène est présenté Figure 1 en 1D à titre d'illustration.

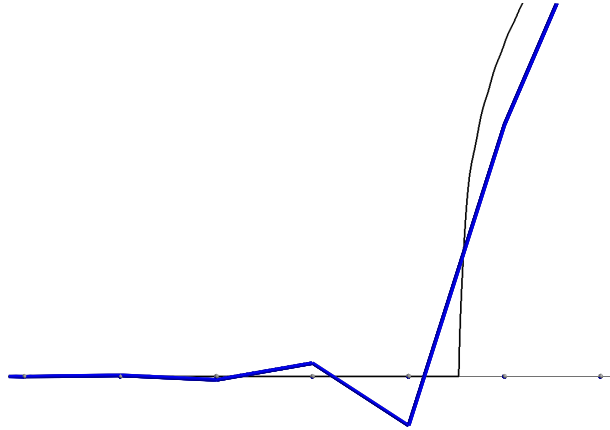


FIGURE 1 – En noir : solution analytique de l'équation (3). En bleu : solution obtenue avec la méthode des éléments finis. La discrétisation induit des oscillations dans la *région vide*, violant la propriété de non-négativité.

Pour contourner ce problème, plusieurs approches ont été proposées. Une première idée consiste à utiliser un schéma numérique garantissant la non-négativité de la solution. Une telle méthode est proposée dans [7], où une méthode des éléments finis de Galerkin discontinue locale est couplée à un limiteur dédié afin d'assurer la non-négativité de la solution. Une démonstration y est fournie, montrant que ce limiteur garantit la non-négativité de la solution pour les éléments finis discontinus \mathbb{P}_0 , et des résultats numériques 1D sont présentés pour des éléments finis discontinus \mathbb{P}_2 , pour lesquels la non-négativité est préservée et un ordre de convergence égal à 3 est retrouvé.

Une seconde famille d'approches consiste à utiliser une discrétisation spatiale dépendant du temps. Dans [4], une méthode des éléments finis à maillage mobile adaptatif est proposée. Les maillages utilisés pour résoudre la PME sont dépendants du temps mais possèdent tous la même topologie (même nombre de sommets et d'éléments, et même connectivité). Chaque maillage est généré de sorte que la taille de ses éléments respecte une métrique imposée, et différentes métriques sont étudiées. Les auteurs montrent qu'en utilisant une métrique cible basée sur la Hessienne de la solution au pas de temps précédent, il est possible de retrouver un ordre de convergence en $O(h^2)$ pour $m = 1$ et $m = 2$ pour la solution de Barenblatt–Pattle. Il est important de noter qu'avec cette méthode, la non-négativité de la solution n'est pas préservée et des oscillations à l'interface $\Gamma_{u(t)}$ subsistent. Toutefois, la métrique cible employée conduit à une taille d'élément plus faible au voisinage de l'interface, ce qui réduit significativement la propagation des oscillations dans la *région vide*.

Dans [1], un algorithme d'éléments finis à maillage mobile pour les EDP à frontières mobiles est proposé, et appliqué à la solution de Barenblatt–Pattle de la PME. Dans ce cas, seule la partie du domaine de calcul où $u > 0$ est maillée, et le maillage évolue dans le temps de manière à assurer la conservation de la masse de la solution. Cette approche permet d'obtenir une convergence d'ordre deux pour $m = 1$ et une convergence d'ordre un pour $m = 3$. En revanche, cette méthode ne permet pas de traiter les changements de topologie de $\mathcal{P}_u(t)$, ce qui peut conduire le maillage à se recouper lui-même et nécessite de le coupler à un algorithme de remaillage dans de tels cas, ce qui n'est pas présenté dans l'article.

La méthode proposée ici s'inscrit dans la catégorie des méthodes à maillages mobiles. Le principe de la méthode X-MESH est, à chaque pas de temps t_n , de déterminer simultanément la solution u_n et la discrétisation spatiale \mathcal{T}_n de sorte que \mathcal{T}_n conserve la même topologie que \mathcal{T}_{n-1} , et que l'interface Γ_{u_n} soit entièrement représentée par les sommets et les arêtes de \mathcal{T}_n .

3 L'approche X-MESH

L'approche X-MESH utilise une discrétisation spatiale dépendant du temps. Afin de développer une formulation discrète appropriée du problème, nous introduisons le cadre de référence lagrangien–eulérien arbitraire (ALE) [2]. Nous définissons le domaine de référence Ω_0 par $\Omega_0 = \Omega$ et un mapping $\mathbf{X} \in (H^1(\Omega_0 \times [t_0, T]))^d$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega_0 \times [t_0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (\mathbf{X}_0, t) &\mapsto X(\mathbf{X}_0, t) \end{aligned} \quad (7)$$

Nous définissons $\Omega_t = \{\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t), \mathbf{X}_0 \in \Omega_0, t \in [t_0, T]\}$, $\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_0}$, $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \Big|_t$ et $J = \det \mathbf{F}$. La formulation variationnelle obtenue à partir de (3) est :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{u} u \, d\Omega = - \int_{\Omega} \kappa |u|^m \nabla \bar{u} \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega} u \mathbf{w} \nabla \bar{u} \, d\Omega \quad (8)$$

La discrétisation spatiale est réalisée en partitionnant le domaine de référence Ω_0 en un maillage triangulaire \mathcal{T}_0 dont l'ensemble des nœuds est noté \mathcal{N}_0 . La discrétisation spatiale à l'instant t est la triangulation $\mathcal{T}(t)$ obtenue en appliquant le mapping \mathbf{X} à \mathcal{T}_0 . Par construction, la topologie du maillage (nombre de nœuds et connectivités) ne dépend pas du temps. L'intégration en temps de l'équation (8) entre deux instants t_n et t_{n+1} est effectuée au moyen d'un θ -schéma.

L'approche X-MESH est résumée dans l'algorithme 1, où *solve* désigne une résolution par éléments finis avec deux triangulations fixes \mathcal{T}_n et \mathcal{T}_{n+1} , *localize_interface* une procédure de sélection marquant les nœuds de \mathcal{T}_{n+1} qui doivent appartenir à l'interface, *update_interface* une modification de \mathcal{T}_{n+1} déplaçant les nœuds marqués vers une position estimée de l'interface Γ_{n+1}^h , et R l'évaluation du résidu.

Pour que cette approche soit efficace, la méthode *solve* doit fournir une solution à partir de laquelle la sélection des nœuds appartenant à Γ_{n+1}^h est aisée (c'est-à-dire une solution sans oscillations se propageant dans tout le domaine).

Algorithm 1: Schéma de résolution pour le pas de temps $[t_n, t_{n+1}]$. La solution (U_n, \mathbf{X}_n) à l'instant t_n est connue, tol est une tolérance de convergence imposée par l'utilisateur.

```

k ← 0;
 $\mathbf{X}_{n+1}^0 \leftarrow \mathbf{X}_0$ ;
 $U_{n+1}^0 \leftarrow solve((U_n, \mathbf{X}_n), \mathbf{X}_{n+1}^0)$ ;
 $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h) \leftarrow localize\_interface(U_{n+1}^0, \mathbf{X}_{n+1}^0)$ ;
while  $\varepsilon > tol$  do
     $\mathbf{X}_{n+1}^{k+1} \leftarrow update\_interface(\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h), (U_n, \mathbf{X}_n), (U_{n+1}^k, \mathbf{X}_{n+1}^k))$ ;
     $U_{n+1}^{k+1} \leftarrow solve((U_n, \mathbf{X}_n), \mathbf{X}_{n+1}^{k+1})$ ;
     $\varepsilon \leftarrow R((U_n, \mathbf{X}_n), (U_{n+1}^{k+1}, \mathbf{X}_{n+1}^{k+1}))$ ;
    k ← k + 1;
 $(U_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1}) \leftarrow (U_{n+1}^k, \mathbf{X}_{n+1}^k)$ ;

```

3.1 Calcul de la solution U_{n+1}^k associée à \mathbf{X}_{n+1}^k

L'étape désignée par *solve* dans l'algorithme 1 est détaillée ici. Cette étape a pour objectif de calculer U_{n+1}^k pour un \mathbf{X}_{n+1}^k fixé, lorsque (U_n, \mathbf{X}_n) est connu. Afin de simplifier les notations, dans cette section U_{n+1}^k et \mathbf{X}_{n+1}^k seront respectivement notés U et \mathbf{X} , et ϕ_i désignera la fonction de base éléments finis de premier ordre associée au nœud $i \in \mathcal{N}$.

Ce problème est non linéaire et peut, par exemple, être résolu à l'aide d'un schéma de Newton–Raphson. Une estimation initiale U_0 est choisie et la solution est mise à jour selon :

$$H_j \cdot U_{j+1} = H_j \cdot U_j - G_j \quad (9)$$

tant que $\|G_j\|$ reste supérieure à une tolérance imposée par l'utilisateur, avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\phi_i, U_j, \mathbf{X}, U_n, \mathbf{X}_n) \text{ le résidu de la formulation faible discrétisée associé à } \phi_i \\ G_j = \begin{bmatrix} r(\phi_1, U_j, \mathbf{X}, U_n, \mathbf{X}_n) \\ \vdots \\ r(\phi_N, U_j, \mathbf{X}, U_n, \mathbf{X}_n) \end{bmatrix} \\ H_j = \frac{\partial G_j}{\partial U_j} \end{array} \right. \quad (10)$$

Comme mentionné à la Section 2, si les nœuds de \mathcal{T}_{n+1} ne décrivent pas Γ_{n+1}^h , la résolution de l'équation (9) conduit à une solution qui viole la non-négativité et présente des oscillations se propageant dans tout le domaine.

Afin de contourner cette difficulté et de garantir la non-négativité de la solution convergée U , l'itération de Newton–Raphson (9) est modifiée par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange $\lambda^{\mathcal{D}}$ afin d'imposer une condition de Dirichlet homogène sur un ensemble de sommets judicieusement choisi $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$. En définissant $\mathcal{F} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$ et I la matrice identité, l'itération de Newton–Raphson avec multiplicateurs de Lagrange s'écrit :

$$\begin{bmatrix} H_j^{\mathcal{F}\mathcal{F}} & H_j^{\mathcal{F}\mathcal{D}} & 0 \\ H_j^{\mathcal{D}\mathcal{F}} & H_j^{\mathcal{D}\mathcal{D}} & -I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j+1}^{\mathcal{F}} \\ U_{j+1}^{\mathcal{D}} \\ \lambda_{j+1}^{\mathcal{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_j^{\mathcal{F}\mathcal{F}} & H_j^{\mathcal{F}\mathcal{D}} & 0 \\ H_j^{\mathcal{D}\mathcal{F}} & H_j^{\mathcal{D}\mathcal{D}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j^{\mathcal{F}} \\ U_j^{\mathcal{D}} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_j^{\mathcal{F}} \\ G_j^{\mathcal{D}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Il convient de noter que l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange est ciblée uniquement sur les nœuds pour lesquels la solution U serait négative, ce qui impose de conserver des multiplicateurs strictement positifs. Ainsi, pour calculer la mise à jour de la solution U_{j+1} , on définit l'ensemble de sommets \mathcal{D} de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \{m \in \mathcal{N} \mid U_j^m < 0 \text{ ou } \lambda_j^m > 0\} \quad (12)$$

Cette méthode de résolution permet de garantir la non-négativité de la solution en tout point et d'empêcher la propagation des oscillations dans l'ensemble du domaine Ω , comme le met en évidence la Figure 2.

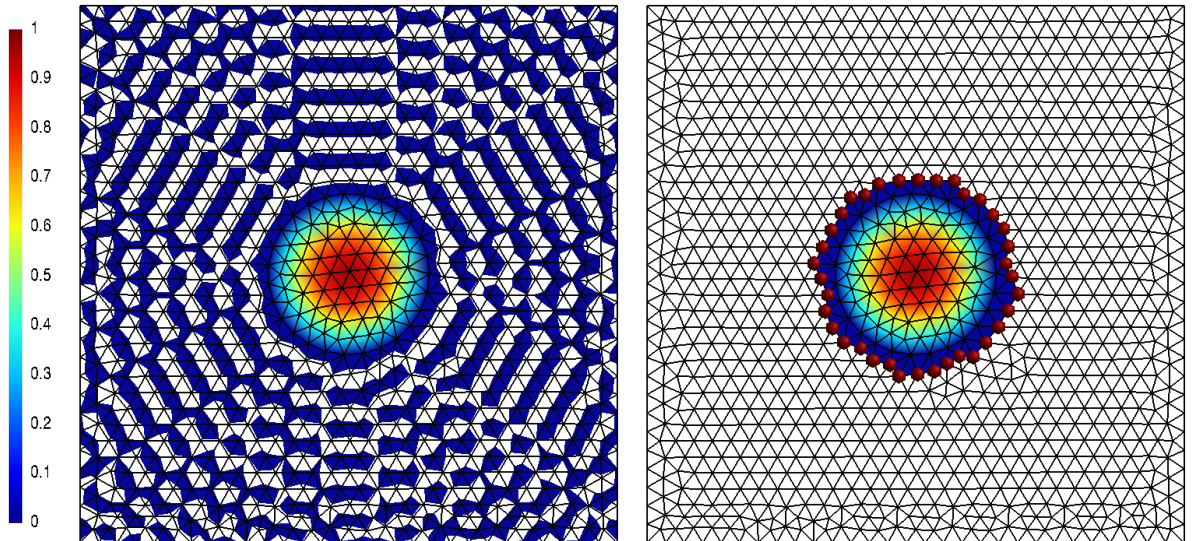


FIGURE 2 – Solutions numériques obtenues à t_{n+1} lorsque \mathcal{T}_{n+1} ne décrit pas entièrement Γ_{n+1}^h . Les zones colorées correspondent à la partie du domaine Ω où $u > 0$. À gauche : solution obtenue avec des itérations de Newton–Raphson classiques. À droite : solution obtenue avec des itérations de Newton–Raphson avec multiplicateurs de Lagrange décrites par l'équation (11). Les sphères rouges mettent en évidence les nœuds associés à un multiplicateur de Lagrange.

L'introduction de multiplicateurs de Lagrange modifie le problème traité. En particulier, en évaluant la formulation faible discrétisée pour la fonction test constante $\hat{u}^h = 1$, on obtient

$$\int_{\Omega} u_{n+1}^h d\Omega - \int_{\Omega} u_n^h d\Omega = \sum_{m \in \mathcal{D}} \lambda^m > 0. \quad (13)$$

Autrement dit, la variation de masse entre deux pas de temps est directement liée aux multiplicateurs de Lagrange actifs, et la conservation stricte de la masse n'est plus garantie tant que ceux-ci sont non nuls.

On remarque toutefois qu'à la convergence de l'algorithme 1, la solution est non négative sur Ω sans qu'il soit nécessaire de recourir aux multiplicateurs de Lagrange, ce qui implique $\mathcal{D} = \emptyset$. Dans cette situation, le problème résolu coïncide à nouveau avec la formulation faible discrétisée de (8), ce qui garantit la conservation de la masse à hauteur de la tolérance de convergence fixée pour l'algorithme 1.

3.2 Estimation de la position de l'interface et mise à jour du maillage

Étant donnée une solution $(U_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1})$, il est possible de scinder l'ensemble des nœuds \mathcal{N} en deux sous-ensembles \mathcal{N}_P et \mathcal{N}_Q :

$$\begin{cases} \mathcal{N}_P &= \{i \in \mathcal{N} \mid U_{n+1}^i > 0\} \\ \mathcal{N}_Q &= \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_P \end{cases} \quad (14)$$

\mathcal{N}_P correspond à l'ensemble des nœuds situés à l'intérieur de la phase à l'instant t_{n+1} et \mathcal{N}_Q à l'ensemble des nœuds situés à l'extérieur de la phase. L'interface Γ_{n+1}^h se trouve à l'intérieur des triangles de \mathcal{T}_{n+1} dont les sommets appartiennent à la fois à \mathcal{N}_P et à \mathcal{N}_Q , mais sa position exacte n'est pas connue a priori. Nous définissons maintenant :

$$\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h) = \{i \in \mathcal{N}_Q \mid i \text{ est connecté à au moins un nœud de } \mathcal{N}_P\} \quad (15)$$

$\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ est l'ensemble des nœuds qui seront utilisés pour décrire Γ_{n+1}^h (Figure 3). Il est défini une seule fois pour le pas de temps t_{n+1} et reste inchangé lors des mises à jour successives de la position des nœuds de \mathcal{T}_{n+1} . Cette étape correspond à l'appel *localize_interface* dans l'algorithme 1. Au cours de la procédure de mise à jour du maillage, les nœuds de $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ seront déplacés vers une position estimée de Γ_{n+1}^h .

Il est important de noter que déplacer simultanément tous les nœuds de $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ sur Γ_{n+1}^h est un problème non linéaire mal posé. L'approche adoptée dans ce travail consiste à calculer et à mettre à jour une position optimale estimée pour chaque nœud de $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ indépendamment des autres, puis à réitérer ce processus jusqu'à convergence.

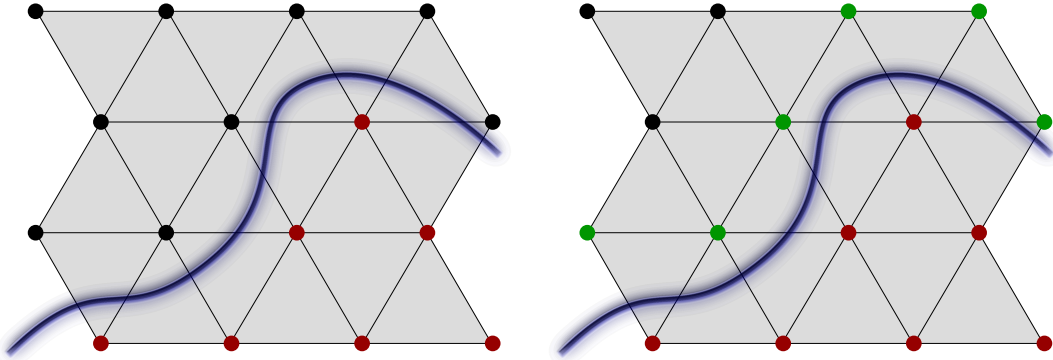


FIGURE 3 – À gauche : en rouge, les nœuds de \mathcal{N}_P et, en noir, les nœuds de \mathcal{N}_Q . À droite : en vert, les nœuds sélectionnés pour appartenir à $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$. La ligne bleue floutée représente la localisation approximative de Γ_{n+1}^h .

Soit $p \in \mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ un nœud marqué comme appartenant à l'interface Γ_{n+1}^h . Afin d'obtenir une bonne estimation de la position de l'interface Γ_{n+1}^h , nous considérons la solution courante U_{n+1} uniquement sur le patch de triangles \mathcal{T}_{n+1}^p ayant p pour sommet. Nous notons \mathcal{N}^p l'ensemble des nœuds de \mathcal{T}_{n+1}^p et $\bar{\mathcal{N}}^p = \mathcal{N}^p \setminus \mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$ l'ensemble des nœuds connectés à p qui n'appartiennent pas à $\mathcal{N}(\Gamma_{n+1}^h)$.

Enfin, nous définissons \tilde{U}_{n+1} par :

$$\begin{cases} \tilde{U}_{n+1}^i = U_{n+1}^i, \forall i \in \mathcal{N}^p, i \neq p \\ \tilde{U}_{n+1}^p = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Avec ϕ_p la fonction de base éléments finis associée au nœud p , le fait que p appartienne à l'interface $\Gamma_{u_{n+1}^h}$ est équivalent à :

$$\begin{aligned} r(\phi_p, \tilde{U}_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1}, U_n, \mathbf{X}_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi_p \tilde{u} d\Omega + \int_{\Omega} \kappa |\tilde{u}|^m \nabla \phi_p \cdot \nabla \tilde{u} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{u} \mathbf{w} \nabla \phi_p d\Omega \right) dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Nous définissons maintenant un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ et une nouvelle triangulation $\tilde{\mathcal{T}}_{n+1}^{\mathbf{v}}$ obtenue à partir de la triangulation \mathcal{T}_{n+1} en tradant le nœud p de \mathbf{v} .

Le problème consistant à trouver une nouvelle position de p telle que $p \in \Gamma_{u_{n+1}^h}$ peut alors se formuler comme suit :

$$\text{Trouver } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } r(\phi_p, \tilde{U}_{n+1}, \tilde{\mathbf{X}}_{n+1}^{\mathbf{v}}, U_n, \mathbf{X}_n) = 0 \quad (18)$$

Ce problème n'admet pas de solution unique. Afin de simplifier la recherche d'un \mathbf{v} valide, nous ne considérons que des translations le long des arêtes reliant p à $\tilde{\mathcal{N}}^p$. En définissant \mathcal{S}_p l'ensemble des translations possibles pour déplacer le nœud p , on retient celle qui induit la plus faible déformation du maillage.

4 Résultats et conclusion

Pour évaluer les performances de l'approche X-MESH, la méthode est appliquée à la restitution de la solution de Barenblatt–Pattle (6) pour $d = 2$, $\kappa = 1$ et différentes valeurs de m . Les grandeurs d'intérêt sont la localisation de l'interface et la conservation de la masse. À chaque pas de temps, l'erreur de localisation de l'interface rapportée à la taille de maille (f_r) ainsi que la variation de masse rapportée à la masse de la solution initiale (M_r) sont calculées pour chaque solution obtenue. Ces résultats sont présentés à la Figure 4 et montrent que, pour $m \geq 1$, la localisation de l'interface est améliorée d'un ordre de grandeur par rapport à une résolution par éléments finis classique, et que la propriété de conservation de la masse est satisfaite à hauteur de la tolérance de convergence fixée par l'utilisateur.

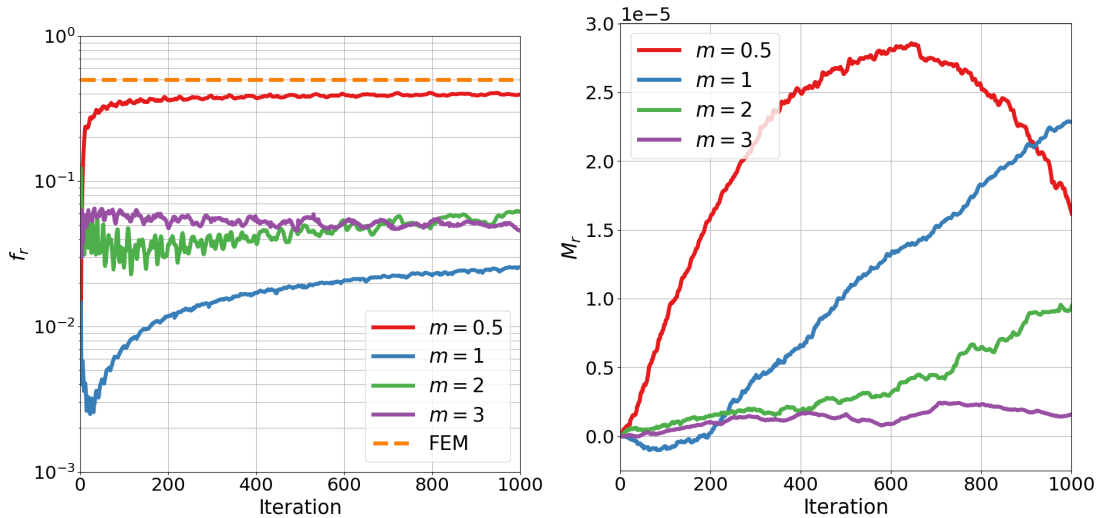


FIGURE 4 – À gauche : erreur sur la localisation de l'interface rapportée à la taille de maille pour différentes valeurs de m . La ligne orange en pointillés représente l'erreur moyenne de localisation de l'interface rapportée à la taille de maille obtenue avec une méthode éléments finis classique. À droite : variation relative totale de la masse pour différentes valeurs de m .

La Figure 5 illustre la simulation d'une configuration où des interfaces coalescent. Dans ce cas, la phase $\mathcal{P}_u(t)$ change de topologie au cours du temps, ce que l'approche X-MESH gère automatiquement et sans difficulté.

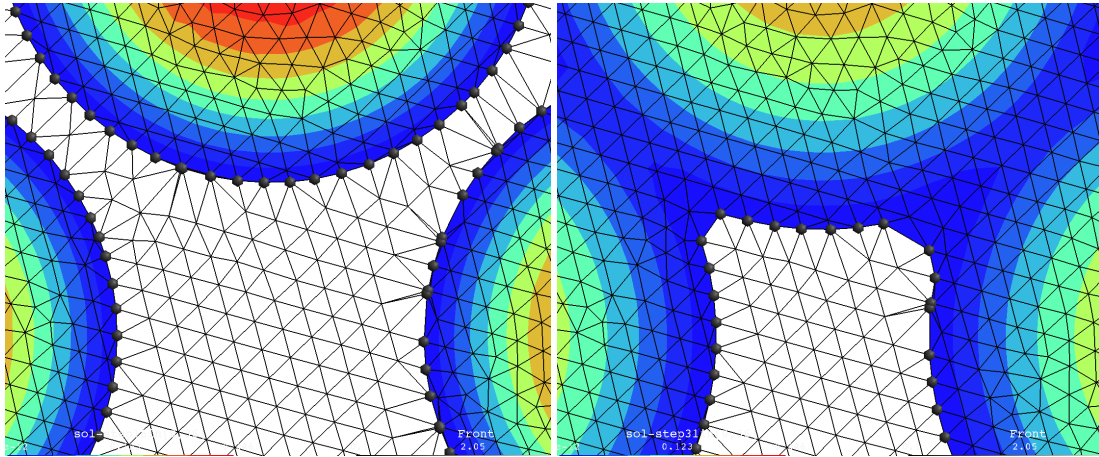


FIGURE 5 – Deux instants chronologiques dans le cas d'interfaces coalescentes. Les éléments colorés appartiennent à la phase, les éléments blancs à la région vide, et les sphères grises sont les nœuds $\mathcal{N}(\Gamma)$ représentant l'interface.

L'approche X-MESH apporte une réponse cohérente à l'ensemble des difficultés de la résolution de la PME non régularisée mises en évidence par la littérature : la non-négativité de la solution est garantie par construction, et les expériences numériques menées montrent en particulier une amélioration significative de la précision de localisation de l'interface, ainsi qu'une conservation de la masse contrôlée par la tolérance de convergence imposée par l'utilisateur.

Cette amélioration de la précision s'accompagne toutefois d'un surcoût de calcul. Le nombre de résolutions de systèmes linéaires par pas de temps dépend fortement de paramètres tels que l'exposant de non-linéarité m et la topologie de l'interface. Dans les expériences numériques que nous avons menées, l'approche X-MESH a nécessité entre 4 et 7 fois plus de résolutions de systèmes linéaires par pas de temps que l'approche éléments finis classique, un surcoût attendu pour une méthode offrant une description plus fine de la dynamique d'interface tout en garantissant la non-négativité de la solution.

En définitive, bien que la méthode X-MESH ait déjà été utilisée pour des problèmes de Stefan et des écoulements diphasiques, son application au cadre de la PME constitue une extension significative de son champ d'utilisation. L'efficacité démontrée pour traiter des difficultés de longue date, tout en fournissant des résultats robustes et fiables, en fait un outil prometteur pour la résolution numérique de la PME.

Références

- [1] Mike J Baines, ME Hubbard, and PK Jimack. A moving mesh finite element algorithm for the adaptive solution of time-dependent partial differential equations with moving boundaries. *Applied Numerical Mathematics*, 54(3-4) :450–469, 2005.
- [2] Daniele Boffi and Lucia Gastaldi. Stability and geometric conservation laws for ale formulations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(42-44) :4717–4739, 2004.
- [3] Nicolas Moës, Jean-François Remacle, Jonathan Lambrechts, Benoit Le, and Nicolas Chevaugeon. The eX-treme Mesh deformation approach (X-MESH) for the Stefan phase change model. *Journal of Computational Physics*, page 111878, 2023.
- [4] Cuong Ngo and Weizhang Huang. A study on moving mesh finite element solution of the porous medium equation. *Journal of Computational Physics*, 331 :357–380, 2017.
- [5] Antoine Quiriny, Jonathan Lambrechts, Nicolas Moës, and Jean-François Remacle. X-mesh : A new approach for the simulation of two-phase flow with sharp interface. *arXiv preprint arXiv :2302.03983*, 2023.
- [6] Juan Luis Vázquez. *The porous medium equation : mathematical theory*. Oxford University Press, 2007.
- [7] Qiang Zhang and Zi-Long Wu. Numerical simulation for porous medium equation by local discontinuous galerkin finite element method. *Journal of Scientific Computing*, 38 :127–148, 2009.