

Tempered Finite Element Method (TFEM) pour le contact entre deux solides bidimensionnels

Y. Ramarotafika¹, A. Quiriny¹, N. Moës¹, J.-F. Remacle¹

¹ *Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, UCLouvain,
{yana.ramarotafika, antoine.quiriny, nicolas.moes, jean-francois.remacle}@uclouvain.be*

Résumé — Les éléments finis dégénérés ouvrent de nouvelles perspectives dans la modélisation de problèmes physiques avec interfaces, comme les contacts. Nous montrons que la *Tempered Finite Element Method (TFEM)*, s'appuyant sur des éléments dégénérés, peut être étendue aux problèmes de contact non-frottant entre deux solides bidimensionnels, grâce à une formulation symétrique et facilement implémentable numériquement.

Mots clés — TFEM, contact, éléments dégénérés.

1 Introduction

Modéliser et simuler efficacement et fidèlement le contact entre deux solides est un enjeu crucial en ingénierie. En effet, le contact entre solides intervient dans de nombreuses applications : engrenages, structures assemblées en génie civil, processus de fabrication industrielle (*e.g.* formage des métaux), crash-test automobile ... L'obtention des contraintes et déformations aux interfaces de contact permet de dimensionner les corps afin d'anticiper l'endommagement voire la rupture de la structure.

La méthode des éléments finis est vastement utilisée dans l'ingénierie afin de modéliser le contact. Cependant, plusieurs difficultés émergent, liées à la nature éminemment complexe de la mécanique du contact. L'étape de détection du contact n'est, par exemple, pas triviale. De plus, l'application des conditions de contact aux interfaces (non-pénétration, loi de Coulomb dans le cas de la friction) apporte également des problématiques dans l'implémentation des algorithmes de résolution. De multiples approches développées pour la modélisation du contact entre solides existent dans la littérature ([1] pour une revue relativement récente). Or, nombre de ces méthodes reposent d'abord sur une asymétrie entre les surfaces de contact : la formulation dépend de la distinction entre une surface *source* et une surface *cible*. De plus, les géométries souvent non conformes des deux surfaces et la discrétisation de ces dernières font intervenir des règles d'intégration complexes. Ces deux points induisent alors une implémentation délicate du contact dans les codes éléments finis, dont l'on souhaiterait se libérer.

Les méthodes *mortar* font partie des méthodes fréquemment employées pour le contact [2]. Dans [9], Quiriny *et al.* proposent une extension de la méthode des éléments finis : la *Tempered Finite Element Method (TFEM)*, se basant sur les éléments dégénérés. Ils ont validé cette approche pour l'élasticité linéaire, et ont démontré que *TFEM* était équivalente à une méthode *mortar* avec pénalisation du saut de la solution, en plus d'être symétrique et simple d'implémentation. Une poursuite naturelle du développement de *TFEM* apparaît alors : la valider pour la modélisation du contact entre deux solides.

Dans ce résumé, nous présentons la *Tempered Finite Element Method* et son extension pour le contact, en adoptant une stratégie par recouvrement. Les simulations, réalisées en 2D sous l'hypothèse des petites perturbations et sans friction, permettent d'évaluer la pertinence de cette approche sur un exemple simple.

2 Tempered Finite Element Method

Pour juger de la qualité d'un élément de maillage pour des calculs numériques, on s'appuie classiquement sur l'étude de l'erreur d'interpolation d'une fonction régulière. Ce point de vue a conduit à l'établissement de plusieurs conditions géométriques pour les maillages triangulaires 2D : la *minimum angle condition* ($\alpha_{\min} \geq \varepsilon > 0$) [6, 7], la *maximal angle condition* ($\alpha_{\max} \leq \pi - \varepsilon$) introduite par Babuška et Aziz [3], ainsi que, plus récemment, la *circumradius condition* ($R_T \leq Ch_T$) [5].

Cependant, l'erreur d'approximation en éléments finis ne se réduit pas à l'erreur d'interpolation. Plusieurs travaux ont en effet montré qu'il existe des maillages pour lesquels l'interpolation ne converge pas, alors que la solution FEM converge correctement [8]. C'est le cas pour des maillages faisant intervenir des éléments dégénérés isolés.

2.1 Matrice de raideur pour les éléments dégénérés

Nous nous intéressons à l'effet de la matrice d'un opérateur laplacien, car c'est le seul opérateur qui produit des contributions réellement mal conditionnées (très grandes ou singulières), et donc qui contrôle le comportement limite de la solution discrète. Comprendre l'effet algébrique d'un élément isolé en train de se dégénérer sur les équations discrètes est essentiel : cela montre comment la matrice de rigidité contraint les valeurs nodales et dicte le comportement numérique lorsque l'élément se dégenère.

Rappelons la définition de la matrice de raideur locale sur un élément E :

$$K_{ij} = \int_E \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx,$$

où ϕ_i et ϕ_j sont les fonctions de base associées aux nœuds i et j .

Considérons un élément triangulaire 2D qui se dégenère en un cap (un angle de 180) comme illustré en Fig. 1. Les nœuds sont positionnés en $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0.5, \varepsilon)$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$, conduisant à la matrice :

$$\underline{\underline{K}} = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 + \frac{1}{4} & -\varepsilon^2 + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\varepsilon^2 + \frac{1}{4} & \varepsilon^2 + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, on obtient essentiellement l'équation $u_A + u_B - 2u_C = 0$ pondérée par un coefficient très grand $\frac{1}{2\varepsilon}$. Cela signifie que la solution FEM sera contrainte de vérifier $u_C = \frac{u_A + u_B}{2}$ pour éviter une contribution énergétique infinie de cet élément.

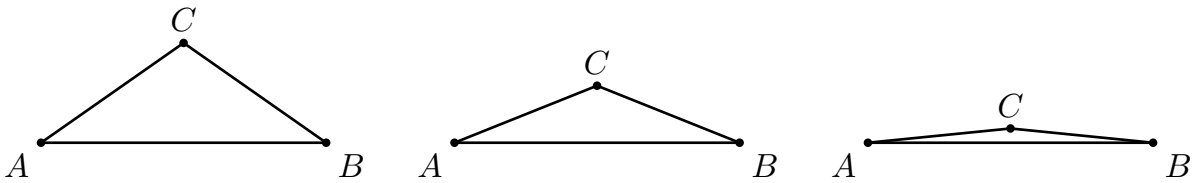


FIGURE 1 – Exemple d'élément triangulaire 2D dégénéré (forme aplatie)

Seules, ces conditions créées par des éléments isolés dégénérés ne posent pas de problème majeur pour la solution FEM. Cependant, lorsque l'on a des clusters d'éléments dégénérés, les contraintes imposées par chaque élément peuvent s'additionner et créer un *locking* sur de larges portions du domaine, entraînant des solutions complètement erronées. En 2D, cela peut se produire lorsqu'on a des bandes d'éléments aplatis comme illustré en Fig. 2, où la solution FEM sera contrainte d'être linéaire le long de la bande.

2.2 Tempérer les équations

Dans les exemples précédents, nous avons montré que les conditions de *locking* induites par des éléments dégénérés proviennent de la contribution dominante de leurs matrices de rigidité, qui tendent vers l'infini lorsque l'élément s'effondre. Ce comportement résulte du fait que les gradients des fonctions de

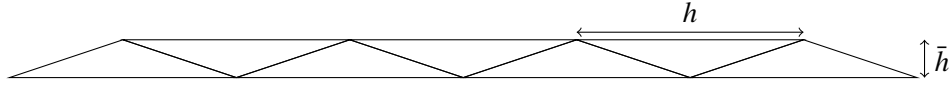


FIGURE 2 – Exemple de bande d'éléments aplatis en motif alterné créant un verrouillage de la solution si \bar{h} est trop petit

base deviennent très grands tandis que le volume de l'élément tend vers zéro, produisant des coefficients extrêmement élevés dans la matrice locale.

Pour évaluer à la fois les intégrales et les gradients des fonctions de base, la formulation standard des éléments finis utilise un élément de référence \hat{E} avec des coordonnées $\underline{\xi}$ et un mapping entre l'élément physique et l'élément de référence, comme illustré en Fig. 3. Le gradient de ϕ peut alors s'écrire comme $\frac{\partial \phi}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\xi}} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}}$.

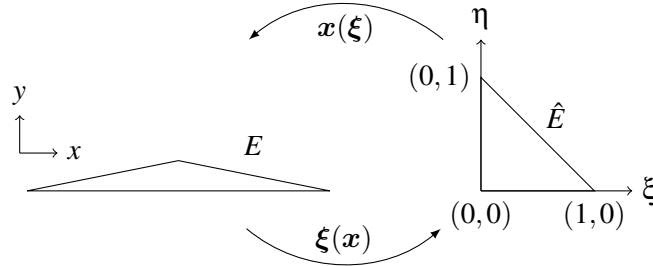


FIGURE 3 – Mapping entre les domaines physique et de référence

La matrice de transformation est donnée par $\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}}$:

$$\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} \right)^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

où $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ est le déterminant du mapping. Ce déterminant apparaît également dans la mesure d'intégration, puisque $d\underline{x} = J d\underline{\hat{x}}$.

Lorsque l'élément dégénère, $J \rightarrow 0$, ce qui introduit une division par zéro dans le calcul des gradients. Cela a deux conséquences directes : des gradients extrêmement grands, produisant des contributions excessives à la matrice de rigidité (responsables du *locking*), et des instabilités numériques.

Pour pallier ces effets, la *Tempered Finite Element Method* [9] remplace la division par J par une division par $\max(J, J_{\min})$, où J_{\min} est une valeur limite positive et petite. La matrice locale modifiée devient ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij} &= \int_{\hat{E}} \frac{1}{\max(J, J_{\min})} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\underline{\hat{x}} \\ &= \frac{J}{\max(J, J_{\min})} K_{ij}. \end{aligned}$$

Pour un élément régulier ($J > J_{\min}$), la matrice modifiée coïncide avec la matrice FEM standard. Pour un élément dégénéré ($J < J_{\min}$), la matrice locale est multipliée par le facteur $\frac{J}{J_{\min}} < 1$, ce qui relâche les conditions de verrouillage. Un choix approprié de J_{\min} permet d'éliminer efficacement le verrouillage dû aux clusters d'éléments dégénérés tout en préservant une bonne précision de la solution. Cependant, un choix de J_{\min} trop grand induit une trop forte modification des équations et donc une erreur de consistance. Comme démontré dans [9], la convergence d'ordre deux de la solution FEM est préservée avec la formulation TFEM lorsque l'on choisit

$$J_{\min} = \frac{|u|_{W^{2,\infty}(E)}}{|u|_{W^{1,\infty}(E)}} h^3,$$

où h est la taille locale de l'élément, et $|u|_{W^{k,\infty}(E)}$ désigne la norme du maximum de la k -ième dérivée de la solution exacte u sur l'élément E . En pratique, comme la solution exacte n'est pas connue, ces dérivées doivent être estimées. La convergence n'est pas très sensible à la valeur exacte de J_{\min} [9], ce qui permet de facilement approximer ces valeurs. Par exemple, si la longueur d'onde caractéristique des variations de la solution est λ , on peut prendre $J_{\min} = h^3/\lambda$.

3 Méthodologie

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, en 2D. Les problèmes étudiés sont statiques, avec des matériaux élastiques linéaires. On se limite au contact entre deux solides dont les géométries sont conformes.

Les domaines solides Ω_1 et Ω_2 sont discrétisés avec deux maillages \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 constitués d'éléments triangulaires de taille h . La position d'un nœud est notée \underline{X} dans la configuration initiale, et \underline{x} dans la configuration déformée. Les interfaces de contact potentielles $\Gamma_1^c \in \partial\Omega_1$ et $\Gamma_2^c \in \partial\Omega_2$ sont également définies. Le domaine entre les interfaces de contact potentielles est alors maillé, résultant en un maillage de contact \mathcal{B} . Lors de la résolution, ses éléments sont activés (*i.e.* assemblés dans la matrice de raideur) uniquement s'ils sont inversés dans la configuration déformée : cela indique qu'il y a eu interpénétration, donc contact. Le paramètre J_{\min} a une influence sur l'interpénétration. Définir $J_{\min} = h^3/\lambda$ permet de vérifier une convergence en $O(h^2)$ de l'interpénétration, comme pour la solution FEM. Toutefois, un affinement du choix de J_{\min} dans le cas du contact mérite de faire l'objet de recherches supplémentaires.

Le problème d'élasticité linéaire est résolu une première fois, en considérant l'ensemble des éléments de matière $\cup_i \mathcal{T}_i$ comme éléments actifs. Ensuite, sur la configuration déformée, les déterminants de tous les éléments sont calculés. On redéfinit alors les éléments actifs comme l'union des éléments de matière et des éléments inversés de \mathcal{B} . Le problème initial est résolu à nouveau, sur ces éléments, puis les éléments inversés sont détectés. Cette boucle de résolution est réalisée jusqu'à convergence sur les éléments actifs.

L'un des avantages de cette approche est qu'il n'y a pas à recréer le maillage de contact, il suffit d'activer ou désactiver ses éléments. Des éléments dégénérés vont donc apparaître au cours de la résolution, et ils seront traités efficacement grâce à la *TFEM*.

Récapitulatif de la méthodologie

1. Définir les éléments *actifs* comme l'ensemble des éléments de matière ($\cup_i \mathcal{T}_i$)
2. Résoudre le problème de statique sur les éléments actifs : obtention du déplacement \underline{u}
3. Actualiser la position des nœuds des éléments actifs : $\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$
4. Calculer les déterminants, sur la configuration déformée, de *tous* les éléments
 - (a) Localiser les éléments *inversés* de \mathcal{B}
5. Redéfinir les éléments actifs comme l'ensemble des éléments de matière *et* des éléments inversés
6. Revenir à la configuration initiale et itérer sur 2 à 5 jusqu'à convergence sur les actifs

4 Application

Deux domaines rectangulaires Ω_1 et Ω_2 , de paramètres matériaux (E_1, ν_1) et (E_2, ν_2) respectivement, $E_1 < E_2$, sont initialement en contact sur toute leur longueur L . Les interfaces de contact potentielles Γ_i^c sont alors les longueurs en face à face (Fig.4). Une pression F est appliquée sur le bord supérieur de Ω_2 , sur une longueur $2C < L$ autour du centre de sa longueur. Le bord inférieur de Ω_1 est en appui sur une longueur $2C$, centrée par rapport à la longueur L .

Le paramètre $J_{\min} = h^3/\lambda$ est choisi, avec $\lambda = 1\text{ m}$, en accord avec les observations de [9]. Les solides étant initialement en contact, les éléments de \mathcal{B} sont exactement dégénérés à la création du maillage.

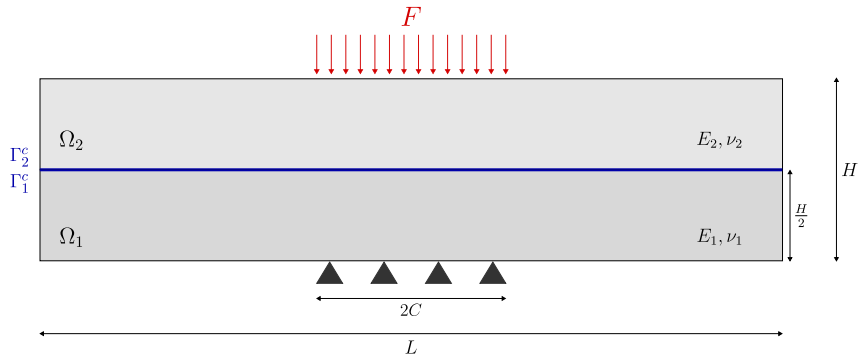


FIGURE 4 – Cas test considéré

Nous nous intéressons à l'allure de la déformée, où nous devons observer l'effet Poisson qui sera caractérisé par un décollement d'une partie des surfaces initialement en contact, hors de la zone d'application des conditions aux limites. Nous étudions également l'évolution de la longueur de contact ℓ_c (longueur de contact active dans la configuration déformée) en fonction de la taille locale h des éléments.

5 Résultats préliminaires

Le maillage des domaines est généré à l'aide de Gmsh [10].

La Figure 5 montre la configuration déformée exagérée. L'effet Poisson attendu est bien observé.

Par ailleurs, les premiers résultats d'évolution de la longueur de contact ℓ_c en fonction de la taille locale h d'élément (Fig.6) montrent une première convergence, qu'il conviendra d'étudier plus en détail afin de s'assurer de son indépendance vis-à-vis de la position des nœuds.

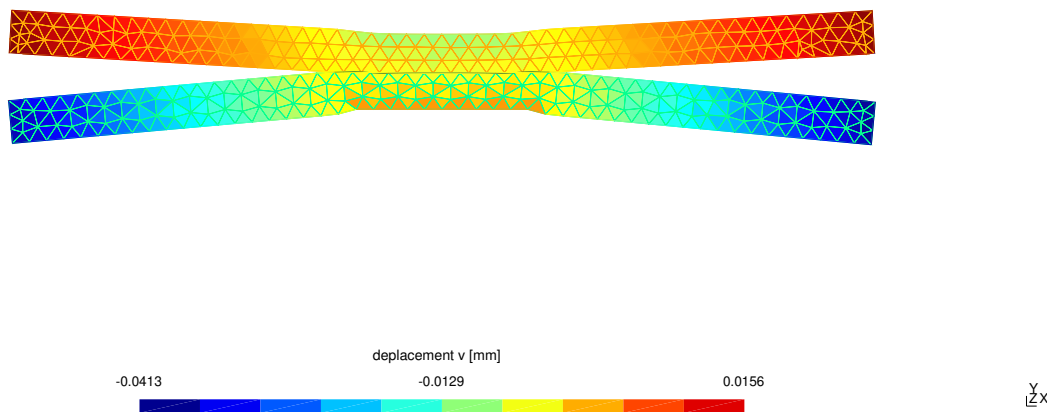


FIGURE 5 – Déformée exagérée avec champ de déplacement vertical v

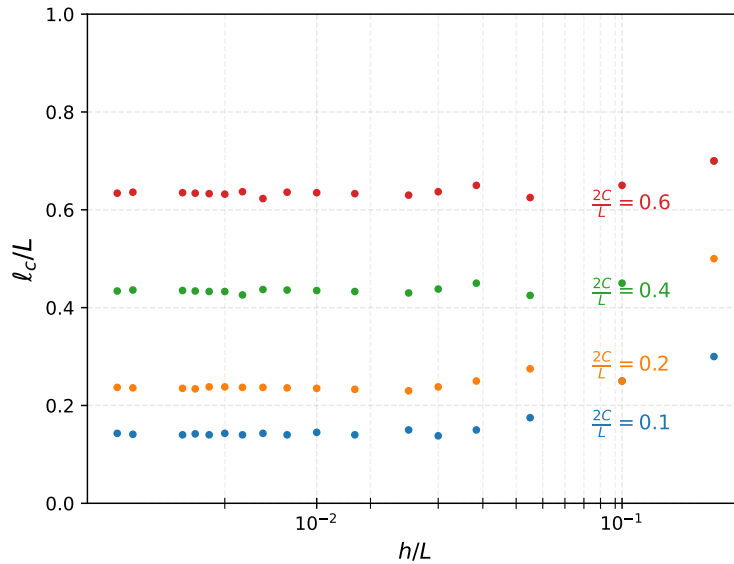


FIGURE 6 – Évolution de la longueur de contact ℓ_c en fonction de la taille locale h d'élément, pour différentes valeurs de $\frac{2C}{L}$

6 Perspectives

Ce travail a montré la pertinence de la *Tempered Finite Element Method* pour le contact 2D non-frottant sous l'hypothèse des petites perturbations, pour des géométries conformes. Les développements futurs s'orienteront vers un élargissement de la méthode à des géométries non conformes. Pour cela, le maillage de contact sera obtenu par triangulation des nœuds aux interfaces de contact potentielles. La méthodologie d'activation des éléments de contact sera applicable, pour des exemples impliquant uniquement des conditions de Dirichlet.

En outre, l'approche X-Mesh [11] sera d'ailleurs particulièrement adaptée pour représenter fidèlement l'interface de contact, sans nécessité de remaillage. L'extension de la *TFEM* aux grandes déformations et aux configurations tridimensionnelles sera également explorée, afin d'aborder des cas plus complexes.

Références

- [1] Vladislav A. Yastrebov. *Numerical Methods in Contact Mechanics*. Wiley, 2013.
- [2] A. Popp. *Mortar methods for computational contact mechanics and general interface problems*. Technical University of Munich, 2012.
- [3] I. Babuška, A. K. Aziz. *On the angle condition in the finite element method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, SIAM, 214–226, 1976.
- [4] A. Quiriny, J. Lambrechts, N. Moës, J.-F. Remacle. *X-Mesh : A new approach for the simulation of two-phase flow with sharp interface*. Journal of Computational Physics, 112775, 2024.
- [5] K. Kobayashi, T. Tsuchiya. *On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements*. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Springer, 65–76, 2015.
- [6] M. Zlámal. *On the finite element method*. Numerische Mathematik, 394–409, 1968.
- [7] A. Ženíšek. *The convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations*. Aplikace Matematiky, 355–377, 1969.
- [8] A. Hannukainen, S. Korotov, M. Křížek. *The maximum angle condition is not necessary for convergence of the finite element method*. Numerische Mathematik, Springer, 79–88, 2012.
- [9] A. Quiriny, V. Kučera, J. Lambrechts, N. Moës, J.-F. Remacle. *The tempered finite element method*. Journal of Computational Physics, 549 :114615, 2026.

- [10] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. *Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.
- [11] N. Moës, J.-F. Remacle, J. Lambrechts, B. Lé, N. Chevaugéon. *The eXtreme Mesh deformation approach (X-MESH) for the Stefan phase change model*. Journal of Computational Physics, 477 :111878, 2023