

Étude numérique du frottement macroscopique de matériaux granulaires mouillés par l'essai de pile conique

A. Pirot¹, M. Henry¹, S. Yans¹, J. Lambrechts¹, V. Legat¹

¹ Université Catholique de Louvain (UCLouvain), Louvain-la-Neuve. Institute of Mechanics, Materials and Civil engineering
{alexandre.piro, michel.henry, simon.yans, jonathan.lambrechts, vincent.legat}@uclouvain.be

Résumé — La stabilité des milieux granulaires est un sujet fondamental de géotechnique. Le mouillage du milieu joue un rôle crucial dans la stabilité de nombreuses structures. Une approche numérique basée sur une dynamique non-régulière de contacts est proposée pour résoudre le problème d'écoulement granulaire de sable avec et sans effets cohésifs de capillarité. L'effet en pile conique est utilisé pour déterminer l'angle de repos ainsi que les interactions lors de l'écoulement du milieu granulaire.

Mots clés — Frottement, cohésion, DEM, NSCD, angle de repos

1 Introduction

Le mouillage des matériaux granulaires constitue un paramètre clé dans l'analyse de la stabilité des structures géotechniques. Un niveau d'humidité adéquat accroît la résistance mécanique du sol, renforçant ainsi sa capacité à résister à l'érosion et augmentant sa résistance au cisaillement. Cette augmentation provient principalement de la formation de ponts capillaires entre les grains, lesquels génèrent une cohésion additionnelle [9]. Lorsque le taux de saturation devient trop élevé, la cohésion capillaire décroît et une perte de cohésion peut survenir, affaiblissant la structure et pouvant conduire à une fluidisation du matériau. Ce régime correspond à un comportement dominé par le frottement interne, comme décrit par [4].

Afin de capturer les comportements macroscopiques émergents des milieux granulaires, diverses méthodes numériques ont été développées, chacune adaptée à des régimes spécifiques d'écoulement et de contrainte. Les méthodes par éléments discrets (DEM) se distinguent par leur capacité à représenter individuellement les grains, en tenant compte des forces de contact, de frottement et, le cas échéant, de cohésion. Chaque grain est supposé rigide, et les interactions sont modélisées à l'aide de lois de contact appropriées. Les contacts sont définis comme unilatéraux. La dynamique est ensuite résolue en intégrant les équations du mouvement pour chaque particule. Dans les régimes denses, où de multiples contacts doivent être traités simultanément, les approches "*time-stepping*" sont couramment utilisées. Elles permettent de résoudre l'ensemble des interactions en un seul pas de temps, indépendamment de l'ordre des collisions, celui-ci tendant vers zéro en cas de contact permanent. Deux grandes familles de schémas "*time-stepping*" coexistent : les formulations régulières et les formulations non régulières. Dans les formulations régulières, les contacts sont modélisés par une force de pénalité proportionnelle à la profondeur de pénétration entre particules. Cette force doit être suffisamment grande pour limiter les inter-pénétrations, tout en restant suffisamment modérée pour éviter un système numériquement trop raide. À l'inverse, les méthodes non régulières, telles que la "*Non-Smooth Contact Dynamics*" (NSCD), décrivent les contacts à l'aide de contraintes d'inégalité, évitant ainsi le réglage délicat des paramètres de pénalité [6]. Ces méthodes nécessitent toutefois des algorithmes itératifs pour assurer la convergence. L'approche NSCD permet de traiter rigoureusement la discontinuité des vitesses induite par les impacts tout en garantissant une représentation cohérente des interactions mécaniques au sein du milieu granulaire. Dans les deux approches, des lois de frottement de type Coulomb peuvent être intégrées afin de représenter les interactions tangentielles entre grains, auxquelles peuvent s'ajouter des forces cohésives dues aux ponts capillaires. Ensemble, ces méthodes offrent un cadre robuste pour analyser le comportement mécanique des matériaux granulaires, depuis l'échelle microscopique des contacts jusqu'aux propriétés macroscopiques émergentes. L'implémentation de ces méthodes a été réalisée dans le code de

recherche MigFlow[5] permettant la simulation d'écoulement granulaires immergés [12].

L'essai en pile conique permet de mesurer l'angle de repos, l'angle maximal qu'un milieu granulaire peut conserver avant de s'effondrer, et le frottement macroscopique des grains, tout en estimant la compacité apparente et l'évolution de la géométrie du cône [8]. Ces observations relient le comportement expérimental aux modèles théoriques des milieux granulaires. L'essai sert également de référence pour comparer différents types de grains et paramètres d'écoulement. Il se réalise en plaçant un échantillon de matériau granulaire (choisi ici comme étant du sable de quartz) dans une enceinte cylindrique pour ensuite soulever les murs et laisser le matériau s'écouler. La comparaison entre l'expérience physique et numérique permet de calibrer les modèles utilisés et révèle les pistes d'améliorations possibles aux quels cas.

La section 2 de cet abstract est consacrée à la formulation de la dynamique des corps rigides, où une attention est portée à l'introduction de forces de cohésion. La section 3 est dédiée à l'approche non-régulière. La section 4 décrit les effets de l'introduction d'un fluide dans un milieu granulaire sec et ses effets potentiels. La section 5 présente l'expérience numérique réalisée.

2 Dynamique de corps rigides avec cohésion

La dynamique d'un corps rigide est gouvernée par les équations de Newton–Euler. Les impulsions appliquées aux particules proviennent des interactions grain-grain, incluant les contacts et les ponts capillaires, ainsi que des interactions extérieures, la gravité dans notre cas [2]. La figure 1 illustre ces contributions.

Afin de tenir compte de la nature discontinue des collisions, la dynamique est écrite sous forme différentielle, tandis que la cinématique est décrite dans un système de coordonnées généralisées,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{T}(\mathbf{q}) \mathbf{v}, \\ \mathbf{M} d\mathbf{v} &= \mathbf{f}_e dt + d\mathbf{p},\end{aligned}\tag{1}$$

où \mathbf{q} est le vecteur des coordonnées généralisées, \mathbf{v} la vitesse généralisée, $\mathbf{T}(\mathbf{q})$ la matrice de transformation reliant les vitesses généralisées à la dérivée temporelle des coordonnées. Ici, $d\mathbf{v}$ est la mesure impulsionnelle de la vitesse généralisée, dt la mesure du temps, \mathbf{f}_e la force extérieure généralisée, $d\mathbf{p}$ l'impulsion généralisée associée au contact, et \mathbf{M} la matrice de masse généralisée,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix},$$

où m est la masse du corps, \mathbf{I} la matrice identité et \mathbf{J} la matrice d'inertie. On notera l'absence de termes gyroscopiques dans l'équation (1), ce qui est justifié dans le cas de grains sphériques en trois dimensions ou circulaires (discoïdaux) en deux dimensions, pour lesquels la matrice d'inertie reste constante dans le repère du corps.

La force capillaire entre deux particules dépend du volume du pont liquide V , de la tension de surface air–eau γ et de l'angle de contact au point triple air–eau–grain θ . Elle est supposée normale au point de contact et attractive aux grains et son amplitude peut être estimée à l'aide de la loi de Richelieu :

$$f_c = \begin{cases} -2\pi\sqrt{R_i R_j} \gamma \cos \theta \exp\left(-\frac{g}{\lambda}\right), & 0 \leq g \leq d_{\text{rupture}}, \\ 0, & g > d_{\text{rupture}}, \end{cases}\tag{2}$$

où g est la distance entre les grains, R_i le rayon de la particule i , d_{rupture} la distance de rupture, et λ une longueur caractéristique,

$$d_{\text{rupture}} = \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) V^{1/3}, \quad \lambda = 0.9 r^{1/2} \left(V \frac{R_i + R_j}{2R_i R_j}\right)^{1/2}, \quad r = \max\left(\frac{R_i}{R_j}, \frac{R_j}{R_i}\right).$$

3 Approche NSCD des contacts

La loi capillaire ainsi définie introduit une interaction attractive à portée finie, dont l'intensité dépend de la géométrie locale et de l'état du pont liquide. Comme cette force dépend directement de la configuration instantanée du système, elle doit être évaluée au même niveau que les impulsions de contact lors de la résolution du problème dynamique. La prise en compte cohérente de ces interactions, *i.e.* collisions, non-interpénétrations, et forces capillaires, nécessite donc de recourir à une formulation unifiée du contact, capable de traiter simultanément des impulsions dues aux chocs et les contributions attractives continues. C'est dans ce cadre que s'inscrit la formulation non-régulière du contact présentée ci-après.

En intégrant explicitement les forces extérieures sur un pas de temps, la dynamique d'un corps se résume alors,

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) = \mathbf{p}$$

où \mathbf{v}^+ est la vitesse à la fin du pas de temps et \mathbf{v}^- est la vitesse après application des forces extérieures, aussi appelée vitesse libre. En exprimant cette relation au point de contact, et en utilisant la vitesse relative et l'impulsion en ce point, la dynamique du contact est alors obtenue comme étant,

$$\delta\mathbf{u}^+ = \delta\mathbf{u}^- + \mathbf{W}\mathbf{r}$$

où $\delta\mathbf{u}$ est la vitesse relative, \mathbf{r} l'impulsion issue du contact (incluant les efforts capillaires) et \mathbf{W} l'opérateur Delassus [1]. Notons que des collisions parfaitement inélastiques sont considérées. Dans ce système, la vitesse relative et l'impulsion associée au contact sont inconnues. L'impulsion associée à la capillarité est déterminée à partir de la force (2) et orientée dans le sens opposé à la normale du contact, son impulsion est donc décrite par $r_c = f_c \Delta t$. La condition de Signorini en prenant compte de la cohésion est donc :

$$r_n \geq r_c, \quad g \geq 0, \quad g(r_n - r_c) = 0.$$

La première condition décrit l'admissibilité d'un contact, la seconde proscrie tout recouvrement entre particule, tandis que la complémentarité impose soit un contact et donc une réaction positive, soit une séparation et donc une réaction égale à la force attractive. La figure 2 illustre la condition.

La loi de frottement de Coulomb est utilisée pour modéliser la résistance tangentielle aux déplacements relatifs entre grains. Dans le cadre d'un contact cohésif, l'impulsion tangentielle \mathbf{r}_t est limitée par un cône de frottement proportionnel à la force normale effective, qui prend en compte la cohésion capillaire : $|\mathbf{r}_t| \leq \mu(r_n - r_c)$, où μ est le coefficient de frottement. Ainsi, la résistance tangentielle maximale augmente lorsque la cohésion retient les grains ensemble, tandis que si le contact se sépare $g > 0$, la force de frottement disparaît.

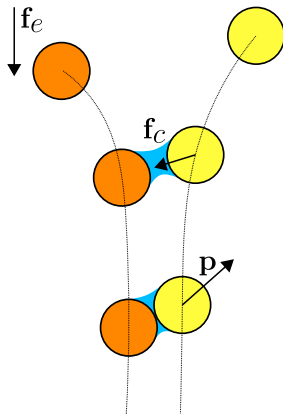


FIGURE 1 – Interactions entre deux grains mouillés.

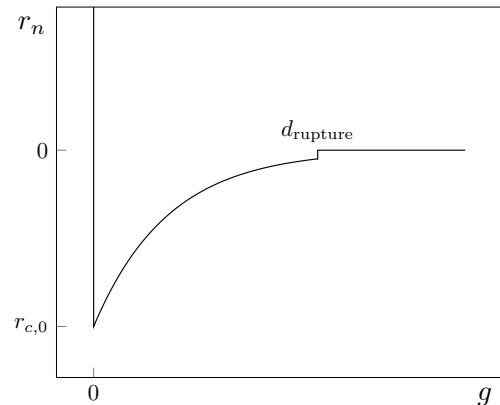


FIGURE 2 – Condition de complémentarité sous cohésion.

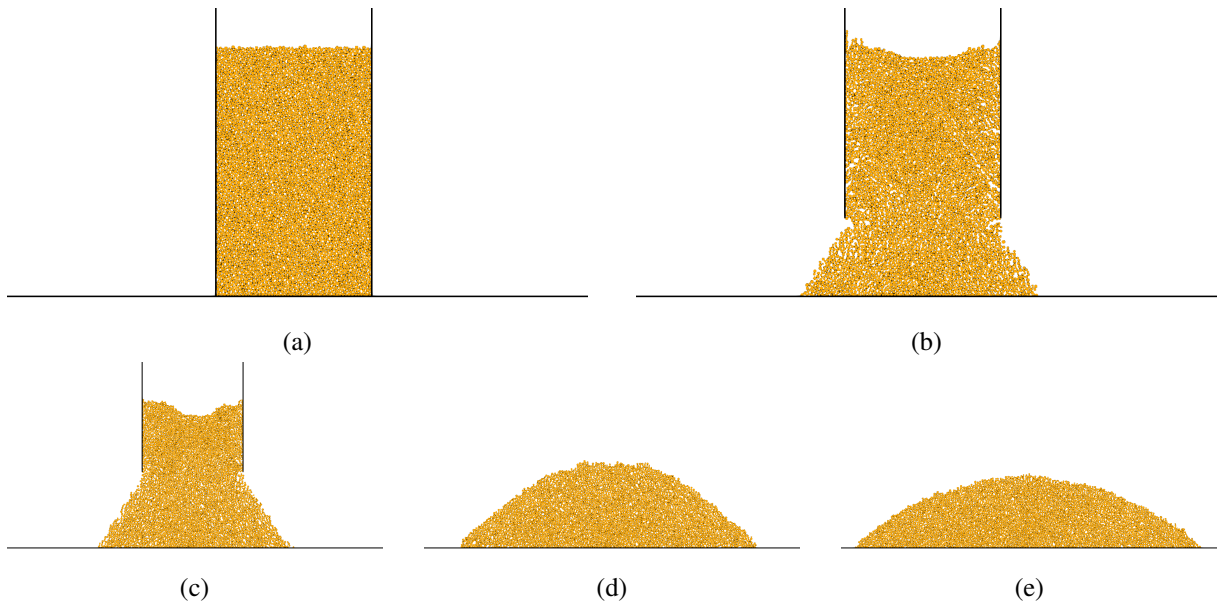


FIGURE 3 – Évolution temporelle de l’expérience numérique à différents moments de simulation. (a) Configuration initiale $t = 0$ (b) $t = 0.5$ s (c) $t = 0.75$ s (d) $t = 2.0$ s (e) $t = 4.0$ [s].

4 Effet de l’introduction d’un fluide en milieu granulaire sec

L’introduction d’un fluide dans un milieu granulaire sec modifie profondément la physique du système. Elle affecte notamment la dynamique de l’écoulement et le transfert des forces à travers les chaînes de forces. L’efficacité de ces chaînes peut être réduite dans certaines conditions de saturation S , comme observé par [3]. À faible saturation, la formation de ponts capillaires augmente la cohésion apparente du milieu [7]. Cet effet décroît avec l’augmentation de S et disparaît lorsque la saturation approche du maximum $S = 1$. Lorsqu’un seuil critique est dépassé, la pression interstitielle peut contrebalancer la contrainte effective, entraînant la fluidisation du milieu granulaire [10]. Dans ce régime dominé par le fluide, les caractéristiques de la pile conique sont modifiées : l’angle de repos diminue, les avalanches deviennent plus fréquentes et le réseau de contacts de la pile est altéré. Ces changements réduisent la capacité du milieu à supporter des contraintes en cisaillement.

5 Simulation en pile conique

L’essai en pile conique est l’un des essais les plus courants pour caractériser les propriétés macroscopiques d’un milieu granulaire. L’expérience consiste à verser un échantillon (du sable de quartz dans notre cas) dans un cylindre creux de diamètre connu et suffisamment haut pour contenir l’ensemble de l’échantillon. Un système de levage permet ensuite de soulever le cylindre à vitesse constante, ce qui entraîne un écoulement libre du sable et la formation d’une pile de forme conique. La répartition des grains dans la pile est isotrope, ce qui permet de mesurer l’angle de repos, défini comme l’angle formé par les surfaces latérales du cône lorsque le matériau est au repos. Cet angle est un paramètre clé pour prédire la stabilité des talus et des stockages granulaires et est l’image directe de la friction macroscopique de l’écoulement. Ce type d’essai offre une base de comparaison entre différents types de grains et constitue un outil de validation pour les paramètres utilisés dans les modèles numériques d’écoulement granulaire.

Prédire les propriétés macroscopiques d’un système granulaire peut s’avérer difficile par la complexité des interactions locales. Les outils numériques permettent d’isoler certains comportements et de mesurer des indicateurs au niveau des microstructures. Dans un premier temps, l’objectif est de reproduire l’angle de repos dans le cas sec afin de valider le modèle et les paramètres de calibration, tels que le frottement grain-grain. L’analyse du réseau de contacts permet ainsi de relier les comportements mi-

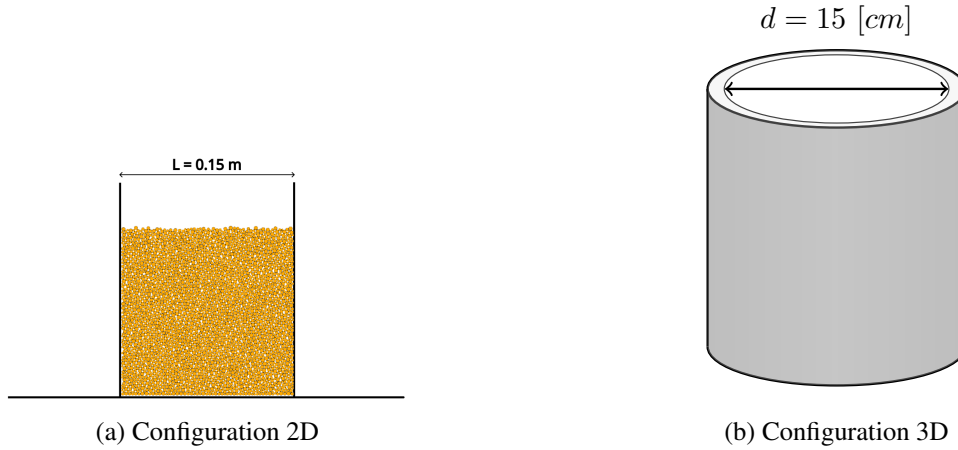


FIGURE 4 – Configuration des expériences 2D et 3D. Le dépôt est généré de manière compact dans l’enceinte. La hauteur de l’enceinte est choisie de telle sorte que les grains soient tous contenus dans celle-ci. Les murs se soulèvent à une vitesse de 1 cm/s dès le début de la simulation.

TABLE 1 – Propriétés physiques des grains simulés.

ρ [kg/m ³]	$\lambda = r_{max}/r_{min}$ [-]	d_{max} [m]	μ [Pa.s]	m_{max} [kg]
2650	2	6×10^{-4}	0.4	0.15

croscopiques observés à la friction macroscopique. Dans un second temps, tous les grains sont supposés mouillés et les mêmes indicateurs sont observés. L’angle de repos est alors considérablement augmenté et la structure de la pile peut se maintenir plus longtemps. L’analyse des microstructures et des anisotropies met en évidence l’effet de la cohésion capillaire sur la stabilité globale de la pile.

Le matériau considéré est un sable de quartz, dont les propriétés sont répertoriées dans la Table 1 et inspirée de l’étude faite par [11]. L’essai en pile conique est représenté par une enceinte cylindrique d’un diamètre de 15 cm. La paroi latérale de l’enceinte est déplacée verticalement à une vitesse constante de 1 cm/s à l’instant au début de l’expérience. Cet échantillon est constitué de 20 000 grains supposés sphériques, ou circulaires. Une légère polydispersité, $\lambda \triangleq r_{max}/r_{min} = 2$, est introduite pour éviter de la cristallisation au sein du réseau de contacts. Deux configurations sont investiguées, la première reproduit le système dans un monde bi-dimensionnel comme une coupe de l’enceinte. Ceci nous permet de reproduire les tendances principales de l’expérience à moindre coût. Ensuite, la seconde configuration est tri-dimensionnel et se veut quantitative.

Les configurations expérimentales sont illustrées dans les Fig. 4a et Fig. 4b. L’évolution de la simulation 2D est illustrée dans la Fig. 3. Cette configuration expérimentale permet d’étudier la compaction du sable, l’alignement, et la répartition des grains, ainsi que l’influence de la polydispersité sur la stabilité finale.

L’angle de repos de la pile est déterminé à partir des grains extrêmes du réseau de contacts, les plus proches et les plus éloignés du centre, via une approche géométrique basée sur leurs coordonnées. Afin d’évaluer l’anisotropie éventuelle de la pile, les angles gauche et droite sont calculés séparément à partir des positions radiales des grains, permettant ainsi de détecter d’éventuelles asymétries dans la formation de la pile.

En conclusion, l’étude numérique du frottement macroscopique des matériaux granulaires mouillés, réalisée via l’essai de pile conique, met en évidence l’impact significatif des ponts capillaires sur le comportement global du matériau. L’implémentation d’un modèle de contact cohésif dans un code de recherche a permis d’observer que la présence de cohésion augmente notablement la friction macroscopique et modifie la structure du réseau de contacts. La calibration du modèle reste cependant délicate, en raison du grand nombre de paramètres liés à la loi capillaire et aux interactions avec les parois.

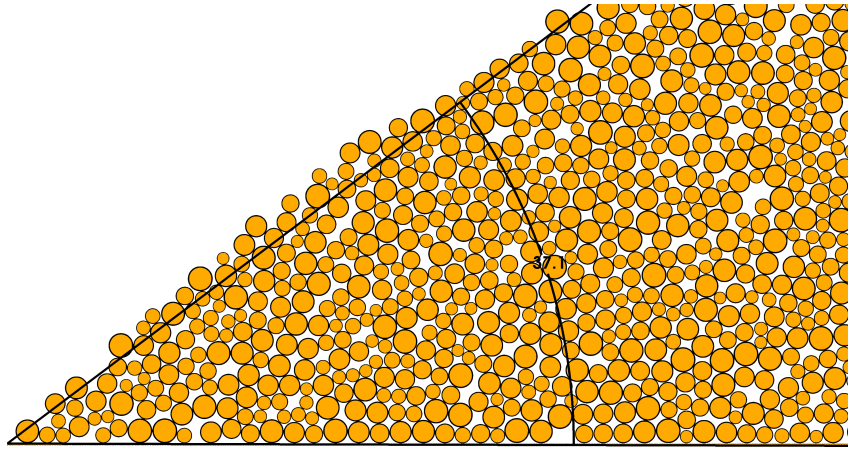


FIGURE 5 – Illustration d'un angle de repos de 37.

Références

- [1] C. Duriez, F. Dubois, A. Kheddar, C. Andriot, *Realistic Haptic Rendering of Interacting Deformable Objects in Virtual Environments*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, page 36 - page 47
- [2] F. Dubois, V. Acary, M. Jean, *The Contact Dynamics method : a nonsmooth story*, Comptes Rendus Mécaniques, Elsevier, 2018
- [3] GDR Midi, *On dense granular flows*, The European Physical Journal E vol. 14, page 341–page 365, 2004
- [4] M. Budhu, *Soil Mechanics and Foundations*, John Wiley & Sons Inc., 2011
- [5] M. Constant, F. Dubois, J. Lambrechts, and V. Legat, *Implementation of an unresolved stabilised FEM–DEM model to solve immersed granular flows*, Computational Particle Mechanics vol. 6, 2018
- [6] M. Jean, *The non-smooth contact dynamics method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 1999
- [7] M. Scheel, R. Seemann, M. Brinkmann, M. Di Michiel, A. Sheppard, B. Breidenbach, S. Herminghaus, *Morphological clues to wet granular pile stability*, Nature materials 7, page 189- page 193, 2008
- [8] R. M. Nedderman, *Statics and kinematics of granular materials*, Cambridge University Press, 1992
- [9] N. Lu, *Unsaturated Soil Mechanics : Fundamental Challenges, Breakthroughs, and Opportunities*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2020
- [10] R. M. Iverson, *The physics of debris flows*, Reviews of Geophysics, page 245 - page 296, 1997
- [11] S. M. Derakhshani, D. L. Schott, G. Lodewijks, *Micro-macro properties of quartz sand : Experimental investigation and DEM simulation*, Powder Technology, Page 127-138, 2015
- [12] T. Leyssens, M. Henry, J. Lambrechts, V. Legat, J.-F. Remacle, *A coupled PFEM-DEM model for fluid-granular flows with free surface dynamics applied to landslides*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 2025