

Adaptation verticale du maillage par EDP : développement et application dans le modèle SLIM sur le lac Tanganyika

F. De Bel¹, J. Lambrechts², V. Legat³

¹ *iMMC, Université Catholique de Louvain, florian.debel@uclouvain.be*

² *iMMC, Université Catholique de Louvain, jonathan.lambrechts@uclouvain.be*

³ *iMMC, Université Catholique de Louvain, vincent.legat@uclouvain.be*

Abstract — L'adaptation de maillage est une technique numérique d'ajustement dynamique du maillage visant à améliorer la précision et l'efficacité des simulations. Dans le contexte de la modélisation océanographique, où les phénomènes physiques tels que les ondes internes jouent un rôle crucial, nous proposons une stratégie d'adaptation verticale du maillage basée sur une EDP pour suivre les gradients de densité et de température. Cette approche est développée et illustrée à l'aide d'un modèle jouet, puis appliquée au modèle SLIM en tenant compte des défis numériques liés à la formulation Galerkin Discontinue et aux spécificités de l'implémentation sur GPU. Enfin, une application est menée sur le lac Tanganyika où l'objectif est de mieux représenter la thermocline, zone à fort gradient thermique qui sépare les eaux chaudes de surface, des eaux froides et profondes.

Mots clés — méthode numérique, adaptation maillage, modélisation physique, océanographie

1 Introduction

Les méthodes numériques sont de plus en plus utilisées pour représenter des phénomènes physiques dans différents domaines d'application. Un problème important est de représenter correctement les champs d'intérêt tout en gardant un coût computationnel raisonnable. Un maillage avec une résolution suffisante est donc primordial. Cependant, de nombreux phénomènes physiques évoluent dans le temps et l'espace, par exemple l'évolution d'un front, la variation d'une surface libre ou le déplacement d'une thermocline. Cette dernière est la fine couche qui délimite la zone où la lumière peut pénétrer et chauffer l'eau de surface, de la zone plus froide et profonde. Cette zone joue un rôle primordial dans le mélange vertical, le transport de nutriments et la dynamique de l'oxygène. C'est pour représenter toutes ces applications que le maillage adaptatif est nécessaire.

Le modèle océanographique côtier SLIM utilise une formulation Galerkin Discontinue (DG) 3D sur GPU [1]. Il s'appuie sur un maillage triangulaire horizontal qui est extrudé verticalement. Dans l'océan, un maillage vertical de type sigma, z, sigma-z, S et terrain-following est souvent utilisé [2, 3]. Pour représenter l'évolution de la surface libre, une variation de position de la couche supérieure est nécessaire. Celle-ci peut aussi être répartie sur toutes les couches verticales pour garder la proportionnalité des couches. Cependant, ce type de maillage ne permet pas de suivre des phénomènes particuliers comme l'évolution de la thermocline. Le but ici est de présenter une stratégie d'adaptation du maillage qui tient compte de l'extrusion verticale.

Dans cette étude, nous proposons une stratégie de type MMPDE (moving mesh partial differential equation) [4, 5]. L'idée est de déplacer verticalement le maillage en fonction d'une équation aux dérivées partielles. Celle-ci utilise une fonction de densité basée sur le champ de tracer à représenter. Cette approche est testée sur des cas stationnaires à l'aide d'un modèle jouet. Ensuite, la méthode la plus pertinente est appliquée au modèle SLIM en tenant compte des difficultés numériques liées au modèle DG 3D et de la complexité de l'implémentation du GPU. Enfin, une validation est réalisée sur le lac Tanganyika, le deuxième plus grand lac d'eau douce du monde qui du fait de ses deux saisons prononcées (saison des pluies et saison sèche) présente d'importantes variations de la position de la thermocline.

L'idée présentée ici est intéressante pour tout autre modèle numérique où le mouvement des noeuds est nécessaire pour représenter un phénomène particulier. La méthode numérique est mise en avant de même que les difficultés liées à son implémentation dans un code DG GPU. Une application écologique concrète est également présentée à titre illustratif.

2 Le modèle

Le modèle SLIM (Second-generation Louvain-la-Neuve Ice-ocean Model) est un modèle océanographique côtier développé à l'UCLouvain. Il s'appuie sur une formulation tridimensionnelle de type Galerkin discontinu (DG) pour résoudre les équations de Navier-Stokes sous les approximations hydrostatique et de Boussinesq. Une équation décrivant l'évolution de la surface libre y est également intégrée.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\nabla \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) + s \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) - f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \mathbf{F}\end{aligned}$$

où \mathbf{u} est la vitesse, η la hauteur de la surface libre, $\bar{\mathbf{u}}$ la vitesse moyenne, H la hauteur de la colonne d'eau, p la pression, ρ_0 la densité de référence, f la fréquence de Coriolis, ν la viscosité cinématique, \mathbf{F} les forces externes (vent) et s le terme de création ou de perte de masse (précipitation et évaporation).

Le modèle est conçu pour fonctionner efficacement sur des architectures GPU, ce qui permet des simulations à haute résolution sur des domaines complexes. SLIM utilise un maillage triangulaire en 2D horizontal, qui est ensuite extrudé verticalement en prismes. Le maillage peut être extrudé de deux manières en sigma (couches proportionnelles à la profondeur totale) ou en z (couches de profondeur fixe), comme illustré dans la Figure 1. La surface libre est modélisée en utilisant un mode-splitting, qui sépare les ondes de surface rapides des mouvements plus lents en profondeur et permet ainsi d'utiliser des pas de temps plus grands pour les mouvements internes [6].

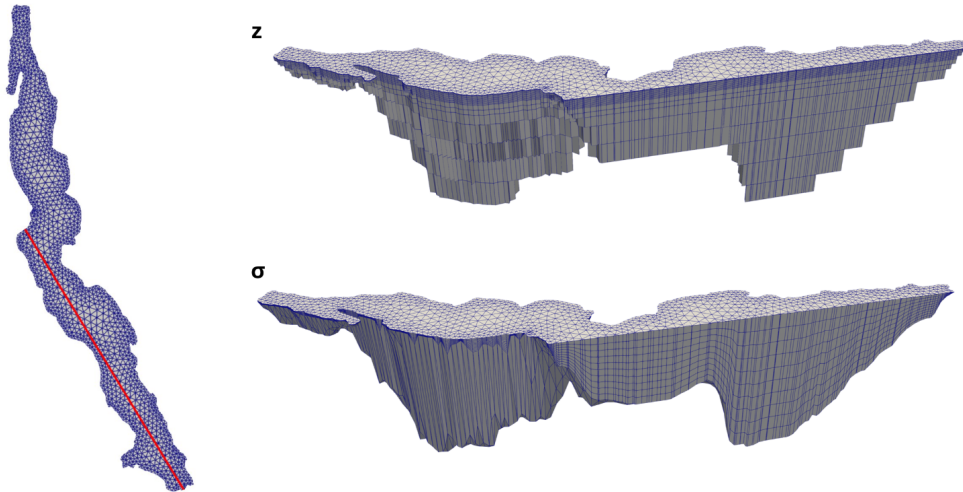


Figure 1: Un maillage horizontal du lac Tanganyika. À droite, deux vues découpées le long de la ligne rouge, en haut une extrusion en z et en bas une extrusion en sigma. À noter qu'un scaling d'un facteur 100 a été appliqué dans la direction verticale.

Le modèle fait intervenir des équations de transport pour les traceurs passifs tels que la température et la salinité, qui influencent la densité de l'eau via une équation paramétrique [7].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi)$$

où ϕ désigne le traceur (tel que la température ou la salinité) et κ sa diffusivité.

3 L'adaptation verticale du maillage

L'idée de la méthode MMPDE (moving mesh partial differential equation) est de déplacer les noeuds en suivant une équation aux dérivées partielles (EDP) [8]. Cette EDP utilise une fonction de monitoring qui indique où le maillage doit être raffiné et déformé. Dans notre cas, nous voulons déplacer les noeuds verticalement pour mieux représenter la thermocline, c'est-à-dire les gradients des champs de température et de densité. Le développement est donc effectué pour un mouvement des points selon la direction z uniquement, étant donné que le maillage horizontal est fixe dans le code SLIM. Cette technique est généralisable pour une adaptation multidimensionnelle. L'équation utilisée est la suivante :

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c(z) \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (1)$$

où ξ est la coordonnée de référence (maillage uniforme), z la coordonnée déplacée et $c(z)$ la fonction de densité/monitoring.

Cette équation a des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que les positions des noeuds aux frontières (surface et fond) sont fixées. Le principe de cette équation est que si la dérivée d'un flux est nulle, alors ce flux est constant. Ainsi la condition qu'on résoud est $c(z) \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$ sur toute la colonne verticale. Le maillage cherche à satisfaire un principe d'équidistribution. Ce qui signifie que la quantité de "maillage" pondérée par la fonction de monitoring est constante. Si la fonction de densité est grande, alors le gradient de z par rapport à ξ doit être petit et les noeuds sont rapprochés (maillage raffiné). Inversement, si la fonction de densité est petite, cela éloigne les noeuds (maillage grossier).

L'important est de bien choisir la fonction de monitoring $c(z)$. Elle peut être basée sur le gradient du champ, sur la dérivée seconde ou d'autres critères. La fonction de densité doit toujours être positive pour assurer un maillage conforme sans inversions de couches, $c(z) < 0$ donnerait un $\frac{\partial z}{\partial \xi} < 0$.

Résoudre ce système d'équation revient aussi à minimiser la fonctionnelle la suivante sous certaines hypothèses:

$$E[z] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} c(z) \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

Dans notre cas, l'équation 1 est résolue de manière discrète sur chaque colonne verticale du maillage. Fixer $c(z)$, puis discrétiser l'équation conduit à un système linéaire. Cependant, comme $c(z)$ dépend des positions des noeuds déplacés, le système est non linéaire. Une résolution itérative ou implicite est donc nécessaire. Ici, une méthode du point fixe relaxée est utilisée. Les dérivées sont discrétisées avec des différences finies, ce qui nous conduit au système suivant :

$$z^{k+1} = (1 - \omega)z^k + \omega f(z^k) \quad (2)$$

$$f(z^k) = \frac{1}{\Delta \xi^2} (c_{i+1/2}(z_{i+1} - z_i) - c_{i-1/2}(z_i - z_{i-1})) = 0$$

où $f(z^k)$ est la solution du système linéaire qu'on obtient en prenant la fonction de densité calculée à partir de la position des noeuds à l'itération k , et ω est un paramètre de relaxation (entre 0 et 1) qui assure la convergence. Une approche avec un temps fictif [9] se ramène à la même formulation mais peut aider à donner un sens physique au coefficient de relaxation et donner une idée de sa valeur.

3.1 Résultats préliminaires

Pour tester cette méthode, un modèle simplifié est employé. Un domaine 2D x - z avec un champ fixe est considéré. Une fonction de monitoring basée sur la valeur absolue du gradient vertical a visuellement un comportement satisfaisant. Cependant, cette fonction de densité peut s'annuler dans certaines zones, ce qui pose problème pour la méthode MMPDE. Une diffusivité background epsilon est donc ajoutée pour garantir la stricte positivité de la fonction de densité. Une petite valeur c_ϵ , interprétée comme une diffusivité de fond, est ajoutée afin de garantir que la fonction de densité reste strictement positive. Cette

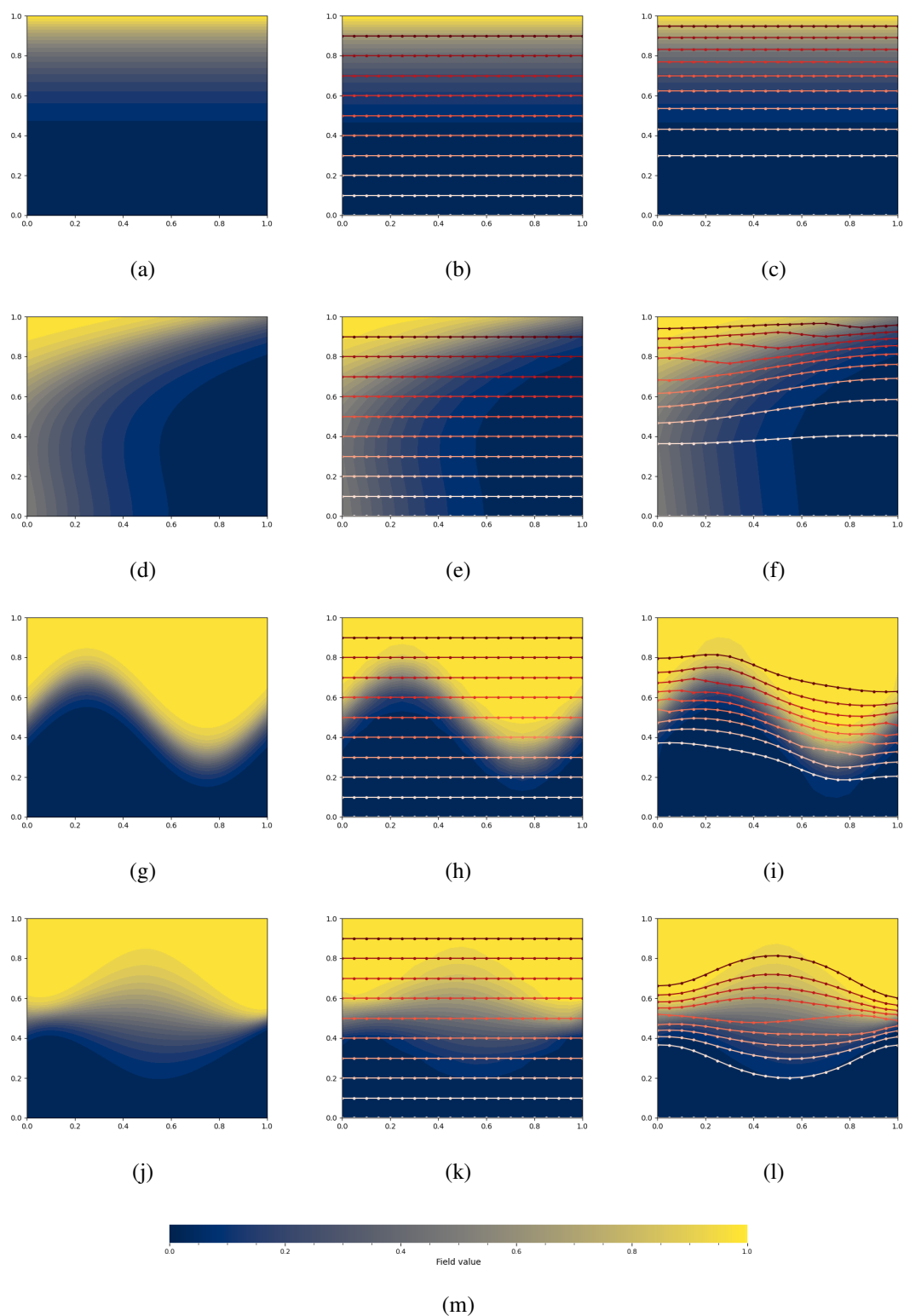


Figure 2: Comparaison du champ analytique **a)**, **d)**, **g)**, **j)**, d'un champ interpolé linéairement sur base de valeurs aux noeuds pour un maillage uniforme **b)**, **e)**, **h)**, **k)** et d'un champ interpolé linéairement sur base des valeurs aux noeuds après adaptation du maillage **c)**, **f)**, **i)**, **l)**. La sous-figure **m)** correspond à l'échelle de couleur utilisée.

contribution minimale empêche l'annulation de la fonction de densité et évite ainsi la dégénérescence de l'équation. Elle agit également comme un terme de régularisation. Plus c_ε est élevé, plus l'adaptation du maillage est atténuée.

Une approche basée sur la racine carrée de la dérivée seconde semble être plus intéressante dans une optique de limiter l’erreur numérique quand on veut représenter correctement un champ. Il est aussi important de limiter la pente des éléments pour des questions de stabilité. Un laplacien horizontal à coefficient constant (c_x) peut donc être ajouté créant une dépendance avec les voisins dans la direction horizontale.

Les résultats préliminaires sont effectués sur un domaine de $[0, 1] \times [0, 1]$ en partant d’un maillage initial uniforme de 20 segments horizontaux et 10 couches verticales. L’équation résolue est

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c(z) \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + c_x \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

avec $c(z) = \sqrt{\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}} + c_\varepsilon$ où $c_\varepsilon = 0.1$ et $c_x = 10$. Le schéma utilisé pour la résolution est une méthode du point fixe relaxée avec $\omega = 0.1$, voir l’équation 2. La condition d’arrêt est basée sur la norme L2 de la différence entre deux itérations consécutives, avec un seuil de 10^{-5} . Les résultats sont présentés dans la Figure 2. On peut voir que l’adaptation du maillage permet de mieux représenter le champ analytique, en particulier dans les zones à fort gradient vertical. Due au laplacien horizontal, les éléments ne sont pas trop inclinés. On peut aussi noter que les points ne suivent pas exactement les isocontours, des relais entre les isocontours sont visibles.

Dans la suite des recherches, différentes fonctions de densité et différents paramètres seront étudiés. Un calcul diagnostique de l’erreur sera aussi proposé pour quantifier l’amélioration de la représentation du champ après adaptation du maillage.

3.2 Ajout dans SLIM

L’implémentation dans le code SLIM pose des défis supplémentaires en raison de sa formulation Galerkin Discontinue. Les champs sont représentés par des polynômes locaux dans chaque élément, ce qui permet des discontinuités aux interfaces entre les éléments. Le champ z est représenté aussi par un champ discontinu. Par conséquent, la fonction de densité évaluée dans un élément donné n’est pas nécessairement identique à celle calculée dans l’élément voisin situé au-dessus ou en dessous. Il est donc nécessaire d’imposer la continuité de la position de deux noeuds, de sorte que deux noeuds voisins le long d’une même colonne partagent la même valeur de z . SLIM tolère une petite discontinuité horizontale mais là aussi une régularisation supplémentaire doit être introduite.

4 Application: le lac Tanganyika

Le lac Tanganyika est un lac d’eau douce situé en Afrique de l’Est. Il s’agit du deuxième plus grand lac d’eau douce du monde par volume et le deuxième plus profond après le lac Baïkal en Russie. Il est partagé entre quatre pays : la Tanzanie, la République démocratique du Congo, le Burundi et la Zambie. Il s’étend sur environ 673 km de long et 70 km de large, avec une profondeur maximale d’environ 1500 mètres. Sa morphologie est composée de trois grands bassins, le bassin nord, le bassin sud et un bassin central un peu moins profond, voir Figure 3. Le lac abrite un très grand nombre de poissons endémiques, ce qui en fait une ressource essentielle pour la pêche locale [10].

Le lac présente une stratification thermique marquée, dans la thermocline dont la profondeur varie en fonction des saisons. Deux grandes saisons se distinguent : la saison des pluies (de novembre à avril) et la saison sèche (de mai à octobre). Durant la saison des pluies, la thermocline est généralement plus profonde en raison d’une chaleur accrue et de vents moins soutenus qui créent moins de remontées. À l’inverse, pendant la saison sèche, un vent du sud-est souffle sur le lac, provoquant un mélange plus important des eaux et une thermocline plus superficielle. Ce vent crée une remontée d’eaux (upwelling) profondes, plus froides et riches en nutriments. La Figure 4 illustre ces contrastes saisonniers : b) correspond à la saison des pluies, c) à la saison sèche et d) au passage de la saison sèche à la saison des pluies. Les forçages atmosphériques utilisés proviennent de [12].

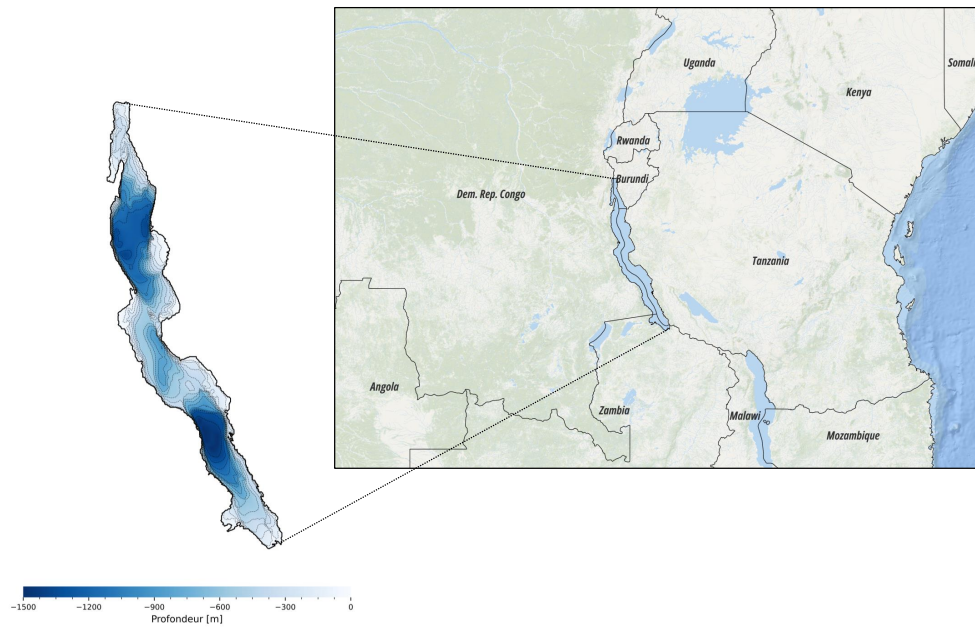


Figure 3: Localisation du lac Tanganyika et sa bathymétrie d'après [11]

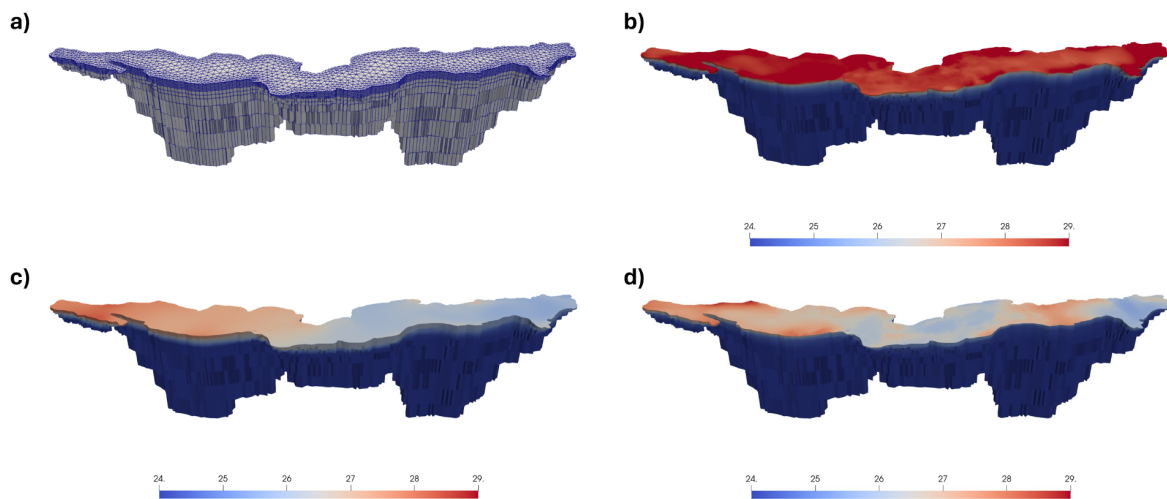


Figure 4: a) Maillage 3D du lac Tanganyika, b), c) et d) champ de température simulé par le modèle respectivement le 1er mars 2003, le 1er juin 2003 et le 1er novembre 2003. À noter qu'un scaling d'un facteur 100 a été appliqué dans la direction verticale sur toutes les figures.

La dynamique physique du lac influence directement les espèces aquatiques et les populations humaines qui en dépendent. Comme le mentionne [10], de nombreux défis environnementaux et socio-économiques sont liés à l'évolution de ces processus hydrodynamiques. Plusieurs travaux antérieurs ont analysé la thermocline et son rôle écologique, notamment à l'aide de modèles à deux couches [13]. Dans cette étude, l'objectif est d'utiliser un modèle 3D avec une résolution verticale variable afin de mieux représenter la physique et son évolution temporelle. L'adaptation permettrait aussi de pouvoir mieux étudier les mouvements saisonniers et plein d'autres phénomènes physiques, tels que les oscillations rapides inter-saisonniers (phénomène de seiche) ou la propagation potentielle d'ondes de Kelvin [14].

5 Conclusion et perspectives

La finalité de ces travaux est d'appliquer la méthode d'adaptation verticale du maillage présentée précédemment, en commençant par calibrer ses différents paramètres sur des cas idéalisés, puis en intégrant ce module dans le modèle SLIM, avant de l'appliquer au lac Tanganyika. L'objectif principal est d'améliorer la représentation de la thermocline et ses variations temporelles, ainsi que les processus physiques importants pour l'écosystème du lac. Dans l'optique de fournir des détails plus importants sur les conséquences écologiques sous-jacentes à des périodes d'extrême vent et aux impacts liés aux changements climatiques.

References

- [1] A. P. Ishimwe, E. Deleersnijder, V. Legat, J. Lambrechts. *A multi-scale IMEX second order Runge-Kutta method for 3D hydrodynamic ocean models*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 113482, 2025.
- [2] E. Deleersnijder, J.-M. Beckers. *On the use of the σ -coordinate system in regions of large bathymetric variations*, Journal of Marine Systems, 3(4), 381–390, 1992.
- [3] J. R. Siddorn, R. Furner. *An analytical stretching function that combines the best attributes of geopotential and terrain-following vertical coordinates*, Ocean Modelling, 66, 1–13, 2013.
- [4] W. Huang, Y. Ren, R. D. Russell. *Moving Mesh Partial Differential Equations (MMPDEs) Based on the Equidistribution Principle*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 31(3), 709–730, 1994.
- [5] H. Burchard, J.-M. Beckers. *Non-uniform adaptive vertical grids in one-dimensional numerical ocean models*, Ocean Modelling, 6(1), 51–81, 2004.
- [6] A. Ishimwe, E. Deleersnijder, J. Lambrechts. *A split-explicit second order Runge–Kutta method for solving 3D hydrodynamic equations*, Ocean Modelling, 186, 102273, 2023.
- [7] D. R. Jackett, T. J. McDougall, R. Feistel, D. G. Wright, S. M. Griffies. *Algorithms for Density, Potential Temperature, Conservative Temperature, and the Freezing Temperature of Seawater*, Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 23(12), 1709–1728, 2006.
- [8] W. Huang, R. Russell. *Adaptive mesh movement — the MMPDE approach and its applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 128(1), 383–398, 2001.
- [9] R. Hofmeister, H. Burchard, J.-M. Beckers. *Non-uniform adaptive vertical grids for 3D numerical ocean models*, Ocean Modelling, 33(1), 70–86, 2010.
- [10] H. Phiri, D. Mushagalusa, C. Katongo, C. Sibomana, M. Z. Ajode, N. Muderhwa, S. Smith, G. Ntakimazi, E. L. R. De Keyzer, D. Nahimana, P. M. Mulungula, L. H. Haambiya, P. M. Isumbisho, P. Limbu, I. A. Kimirei, N. B. Marwa, R. J. Mlingi, A. M. Mangaza. *Lake Tanganyika: Status, challenges, and opportunities for research collaborations*, Journal of Great Lakes Research, 49(6), 102223, 2023.
- [11] TCARTA Marine LLC. 2012. *Lake Tanganyika Bathymetry*
- [12] P. Delandmeter, J. Lambrechts, V. Legat, V. Vallaey, J. Naithani, W. Thiery, J.-F. Remacle, E. Deleersnijder. *A fully consistent and conservative vertically adaptive coordinate system for SLIM 3D v0.4 with an application to the thermocline oscillations of Lake Tanganyika*, Geoscientific Model Development, 11(3), 1161–1179, 2018.
- [13] O. Gourgue, E. Deleersnijder, L. White. *Toward a generic method for studying water renewal, with application to the epilimnion of Lake Tanganyika*, Estuarine, Coastal and Shelf Science, 74(4), 628–640, 2007.
- [14] J. Naithani, E. Deleersnijder. *Are there internal Kelvin waves in Lake Tanganyika?*, Geophysical Research Letters, 31(6), 2004.