

Génération de champs aléatoires par l'IGA et application à la quantification d'incertitudes et à l'optimisation topologique des coques

Philipp Eisenhardt¹, Fernando Hübner¹, Barbara Wohlmuth², Andrei Constantinescu¹

¹ Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS, IP Paris, École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France,
{philipp.eisenhardt, fernando.hubner, andrei.constantinescu}@polytechnique.edu

² Department of Mathematic, Technische Universität München, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching, barbara.wohlmuth@ma.tum.de

Résumé — Nous présentons un cadre numérique basé sur l'IGA permettant de générer des champs aléatoires gaussiens avec covariance de Matérn sur des surfaces multi-patch, via la résolution d'une SPDE de Whittle. Ces champs sont appliqués à des problèmes de référence pour l'analyse de coques. Enfin, nous réalisons une optimisation topologique par méthode level-set pour minimiser la compliance robuste sous chargement incertain. Les résultats montrent qu'un effet significatif est observé sur les géométries obtenues.

Mots clés — Champs aléatoires gaussiens, Covariance Matérn, analyse isogéométrique, optimisation topologique.

1 Introduction

Dans un contexte de réduction de l'utilisation des matériaux, l'estimation précise de la probabilité de défaillance liée aux incertitudes des propriétés mécaniques est devenue un enjeu central de la recherche en mécanique.

Une méthode populaire pour modéliser ces aléas repose sur l'utilisation de champs aléatoires gaussiens (GRF) caractérisés par une covariance de Matérn. La fonction de covariance γ est décrite par deux paramètres : la longueur de corrélation et la régularité. Une fois ces paramètres identifiés, les échantillons du GRF servent d'entrées pour des simulations mécaniques (propriétés du matériau ou chargement), permettant de quantifier l'impact des incertitudes sur le comportement résultant. Au-delà des simulations directes, cette approche s'applique aux problèmes inverses, comme l'optimisation topologique. Comme les schémas d'optimisation classiques se basent souvent sur des propriétés matérielles idéales, une approche qui considère les incertitudes donne une solution plus robuste.

Dans cet article, nous présentons une méthode de génération de GRF via l'échantillonnage d'une équation aux dérivées partielles stochastique (SPDE) de Whittle [10, 11]. Cette génération s'inspire des travaux de [7, 3], et implique la résolution de l'équation par l'Analyse Isogéométrique (IGA), permettant de passer à une régularité plus élevée. Cela permet d'intégrer directement les champs stochastiques aux problèmes mécaniques résolus par l'IGA.

Nous démontrons cette génération sur des surfaces multi-patch avec des SPDEs harmoniques et biharmoniques et appliquons ces GRF à différents problèmes mécaniques pour illustrer leur apport dans la quantification d'incertitudes, notamment sur les déplacements et contraintes du toit Scordelis-Lo. Enfin, nous présentons des résultats préliminaires d'optimisation topologique par lignes de niveau (level-set) sous incertitude d'orientation d'une force.

2 Méthodes Numériques

2.1 Génération de champs aléatoires gaussiens avec covariance de Matérn sur des surfaces par IGA

La fonction de covariance de Matérn modélise la corrélation spatiale entre deux points en fonction de la distance qui les sépare. Elle est définie par :

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} (\kappa d_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^{\nu} \mathcal{K}_{\nu}(\kappa d_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \kappa = \frac{\sqrt{8\nu}}{\lambda}, \quad (1)$$

où σ^2 , ν et $\lambda > 0$ sont respectivement la variance, le paramètre de régularité et la longueur de corrélation du champ. \mathcal{K}_{ν} est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, et κ est un paramètre d'échelle dépendant de λ et ν . Enfin, $d_{\mathcal{D}}(\bullet, \bullet)$ désigne la distance géodésique entre deux points dans le domaine \mathcal{D} .

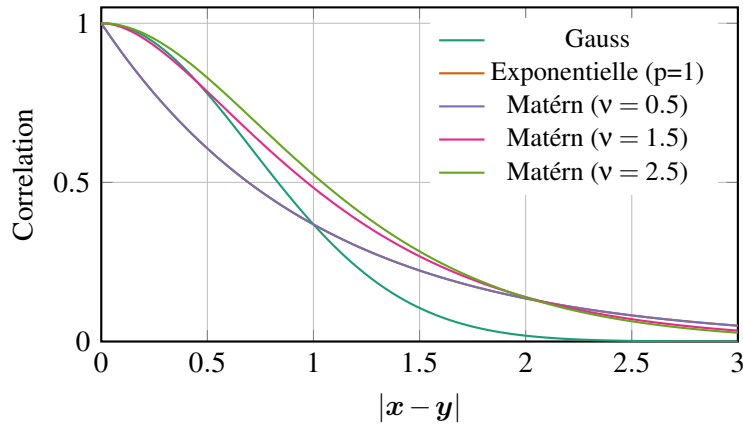


FIGURE 1 – Plusieurs covariances avec différentes régularités et longueurs de corrélation $\lambda = 1$.

Pour la génération des champs aléatoires, nous utilisons l'équation aux dérivées partielles stochastique (SPDE) de Whittle [10, 11], donnée par :

$$(1 - \kappa^{-2}\Delta)^k u(\mathbf{x}; \omega) = \eta \mathcal{W}(\mathbf{x}; \omega), \quad (2)$$

où $\omega \in \mathcal{O}$ est une réalisation d'un espace de probabilité abstrait $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et \mathcal{W} est un bruit blanc gaussien normalisé. La solution de cette équation est un champ dont la régularité est régie par l'exposant k et la dimension spatiale d selon la relation $\nu = 2k - d/2$. Ici $\eta > 0$ est un paramètre de normalisation défini par :

$$\eta^2 = \sigma^2 \frac{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\nu + d/2)}{\kappa^d \Gamma(\nu)}. \quad (3)$$

L'équation (2) est résolue numériquement à l'aide de l'IGA [5]. En particulier, nous considérons le cas $d = 2$ sur un domaine borné \mathcal{D} avec des conditions de bord type Neumann.

Équation harmonique ($k = 1$, $\nu = 1$). Pour $k = 1$, l'équation se réduit à une forme harmonique qui peut être résolue par des éléments finis standards :

$$u(\mathbf{x}; \omega) - \kappa^{-2}\Delta u(\mathbf{x}; \omega) = \eta \mathcal{W}(\mathbf{x}; \omega). \quad (4)$$

Équation biharmonique ($k = 2$, $\nu = 3$). Pour obtenir une régularité plus élevée, nous étudions le cas $k = 2$. Cela conduit à une équation biharmonique (ordre 4), dont la résolution bénéficie d'une interpolation de degré plus élevé, possible avec l'IGA :

$$u(\mathbf{x}; \omega) - 2\kappa^{-2}\Delta u(\mathbf{x}; \omega) + \kappa^{-4}\Delta^2 u(\mathbf{x}; \omega) = \eta \mathcal{W}(\mathbf{x}; \omega). \quad (5)$$

Implémentation multi-patch. Pour modéliser des géométries complexes, nous proposons une approche multi-patch avec la continuité entre les patch imposée faiblement par une approche pénalisée. Soit

$\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$ une collection de K sous-domaines paramétriques ouverts, deux à deux disjoints, définissant une partition de la surface globale \mathcal{D} telle que :

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{D}_k} \quad \text{avec } \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_l = \emptyset \text{ si } k \neq l. \quad (6)$$

Les formulations multi-patch des équations 4 et 5 en multi-patch sont omises dans ce résumé par souci de simplicité. Son implémentation numérique utilise une méthode de Galerkin discontinue à pénalité intérieure symétrique (SIPG), telle que proposée dans [9, 4].

2.2 Application des GRF à la quantification d'incertitudes pour les coques

Les champs gaussiens aléatoires de type Matérn sont utilisés pour étudier l'incertitude dans le cadre de problèmes de mécanique des structures. Ils permettent de quantifier l'effet des variations des propriétés des matériaux et du chargement sur la réponse mécanique de certaines quantités d'intérêt.

On s'appuie sur un modèle d'élasticité linéaire pour les coques de Kirchhoff–Love isogéométriques développé dans [6], combinée à une approche multi-patch implémentée selon [12]. Par la suite, les tenseurs de déformation Green–Lagrange de membrane et de flexion seront notés respectivement ε et κ .

Lorsque l'on modélise le tenseur de rigidité C et la force \mathbf{g} comme des GRF, ceux-ci dépendent de la position spatiale \mathbf{x} et de la réalisation ω . Cela conduit au problème variationnel stochastique suivant, que l'on écrit par simplicité en single-patch.

Problème 1 (Problème de Kirchhoff–Love sous incertitude) Soit $\omega \in \mathcal{O}$ une réalisation. Trouver $\mathbf{u} \in H_D^2(\mathcal{D})$ tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega) = L(\mathbf{v}, \omega) \quad \forall \mathbf{v} \in H_D^2(\mathcal{D}), \quad (7)$$

où a et L sont les formes bilinéaires et linéaires suivantes :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \omega) := \int_{\mathcal{D}} \left(h\varepsilon(\mathbf{u}) : C(\mathbf{x}, \omega) : \varepsilon(\mathbf{v}) + \frac{h^3}{12} \kappa(\mathbf{u}) : C(\mathbf{x}, \omega) : \kappa(\mathbf{v}) \right), \quad \text{et} \quad (8)$$

$$L(\mathbf{v}, \omega) := \int_{\partial\mathcal{D}_N} \mathbf{g}(\omega) \cdot \mathbf{v}.$$

Application aux simulations Monte Carlo. La méthode SPDE est utilisée pour générer des GRFs, ce qui permet la parallélisation des tirages Monte Carlo. Les champs obtenus servent de données d'entrée pour estimer les lois de distribution de probabilités des grandeurs d'intérêt, telles que les déplacements ou les contraintes mécaniques. La mise en œuvre pratique de ces estimations est réalisée à l'aide d'outils open source, notamment OpenTURNS [1].

2.3 Problème d'optimisation topologique

Nous considérons ici la formulation du problème d'optimisation topologique prenant en compte les effets d'incertitude. Le cas déterministe classique de minimisation de compliance est étendu au cas aléatoire via une fonction coût, appelée la *compliance robuste*, telle que proposée dans [2, 8]. Plus précisément, on s'intéresse à minimiser l'espérance de la compliance déterministe et son écart-type. Ce deux quantités sont calculées avec :

$$\mathbb{E}[\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)] = \int_{\mathcal{O}} \underbrace{\left(\int_{\Omega} \left(h\varepsilon(\mathbf{u}) : C(\omega) : \varepsilon(\mathbf{u}) + \frac{h^3}{12} \kappa(\mathbf{u}) : C(\omega) : \kappa(\mathbf{u}) \right) \right)}_{\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)} d\mathbb{P}(\omega), \quad (9)$$

$$\mathbb{V}[\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)] = \int_{\mathcal{O}} \mathcal{J}_C(\Omega, \omega)^2 d\mathbb{P}(\omega) - \mathbb{E}[\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)]^2, \quad (10)$$

où $\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)$ correspond à la compliance de la réalisation ω , le déplacement \mathbf{u} étant solution de l'équation (8).

La fonction de coût robuste est alors définie par :

$$\mathcal{J}_C^R(\Omega) = \mathbb{E}[\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)] + \alpha \sqrt{\mathbb{V}[\mathcal{J}_C(\Omega, \omega)]}. \quad (11)$$

Cette fonctionnelle admet pour dérivée de forme l'expression suivante :

$$\mathcal{J}_C^R(\Omega)(\theta) = \mathbb{E} \left[\left(1 + \alpha \frac{(\mathcal{J}_C(\Omega, \omega) - \mathbb{E}[\mathcal{J}_C])}{\sqrt{\mathbb{V}[\mathcal{J}_C]}} \right) \mathcal{J}_C'(\Omega, \omega)(\theta) \right], \quad (12)$$

où l'expression explicite du terme \mathcal{J}_C' est omise dans ce résumé.

Problème 2 (Problème d'optimisation) Trouver la forme $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ telle que :

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ \mathcal{J}(\Omega) = \underbrace{\mathcal{J}_C^R}_{\text{Compliance robuste}} + \Lambda \underbrace{\int_{\Omega} d\mathbf{X}}_{\text{Volume}} \right\}, \quad (13)$$

$$\text{sous la contrainte du Problème 1.} \quad (14)$$

3 Résultats numériques

Génération de GRF sur des géométries multi-patch par IGA Pour illustrer la génération de champs aléatoires gaussiens sur des domaines multi-patch via l'IGA, nous échantillons deux GRF sur un segment de tore : le premier obtenu par une SPDE harmonique, le second par une SPDE biharmonique. Les résultats numériques montrent un bon accord entre la fonction de corrélation empirique et la covariance de Matérn théorique, cette dernière étant définie par rapport à la distance géodésique.

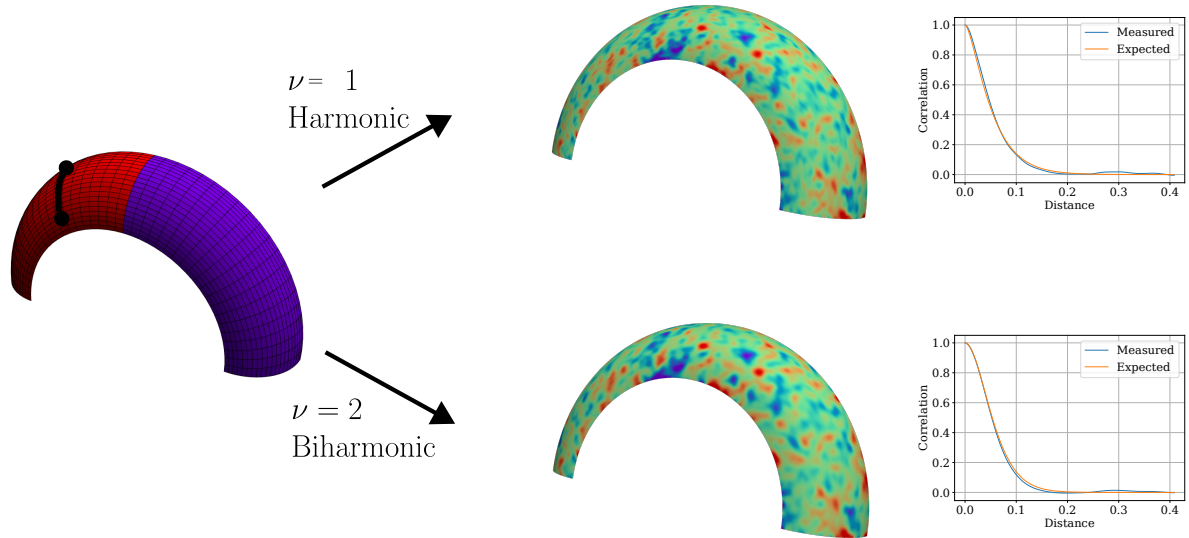


FIGURE 2 – Géométrie multi-patch du segment tore. Comparaison de la covariance obtenue pour deux paramètres de régularité ($\nu = 3$ en haut et $\nu = 7$ en bas) avec la covariance de Matérn.

Optimisation topologique robuste de coques Kirchhoff–Love courbes par approche level-set

Influence du paramètre de robustesse sur un cas d'incertitude sur l'orientation d'une force concentrée. Pour analyser l'effet du paramètre de robustesse α sur la topologie finale, nous considérons un cas test d'une double parabole illustrée dans la figure 3. Une force concentrée est appliquée au centre de la parabole. La magnitude de la force est supposée constante, et son orientation dans le plan $X1$ - $X2$ suit une loi de distribution normale centrée à l'orientation diagonale indiquée.

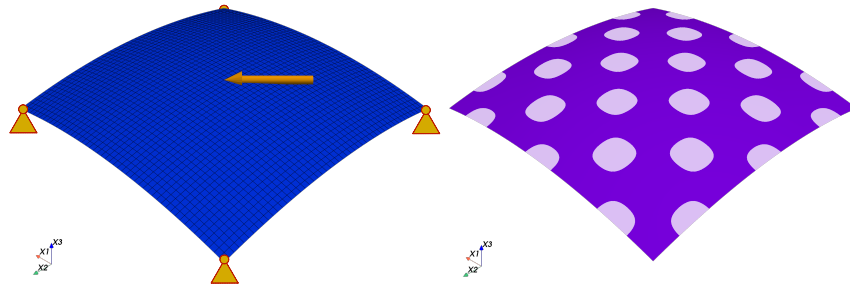


FIGURE 3 – Géométrie de la double parabole avec une force au milieu.

Dans un premier temps, nous faisons varier la pénalisation de la variance α de 0 à 5 tandis que l'écart type de l'orientation de la charge est fixé à 10° . L'optimisation vise à une fraction volumique cible de 50%. La figure 4 montre les résultats de cette optimisation, qui révèlent que pour un paramètre α plus grand, l'optimisation privilégie la résistance aux orientations de force moins probables (hors diagonales). Cela se traduit par des renforts plus importants dans la diagonale, lorsque le paramètre α est plus élevé.

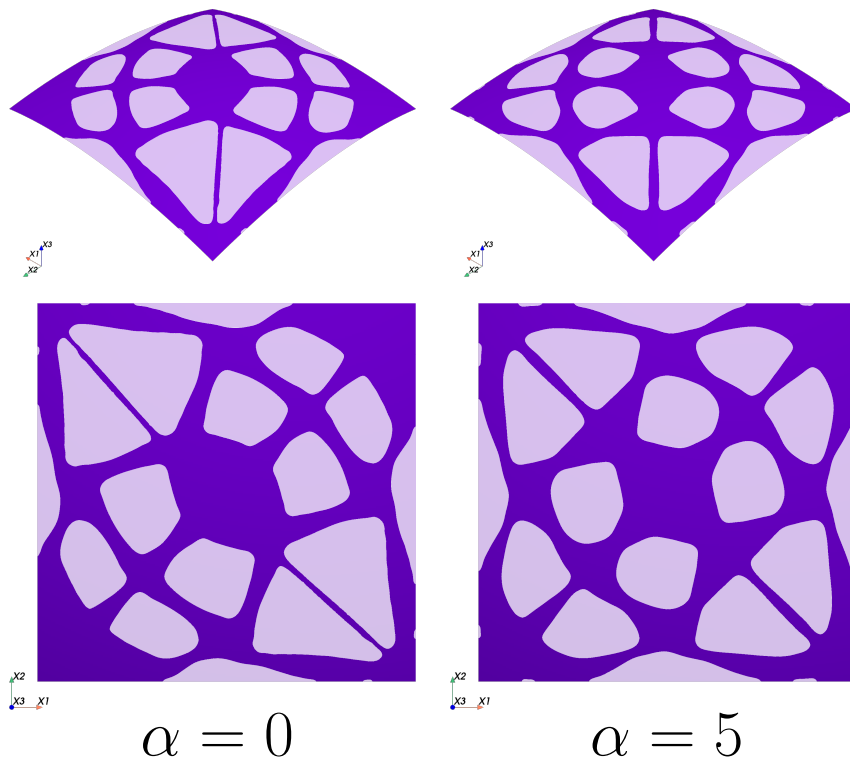


FIGURE 4 – Topologies optimisées pour différentes valeurs du paramètre de robustesse α .

Effet de l'incertitude liée au chargement sur les géométries optimisées.

Pour étudier l'effet de l'écart type de la direction de chargement sur la géométrie optimisée obtenue, définie par l'angle de la force sur le plan X1-X2 (voir figure 5). Comme attendu, lorsque la variance augmente, la topologie optimale s'éloigne de la solution déterministe.

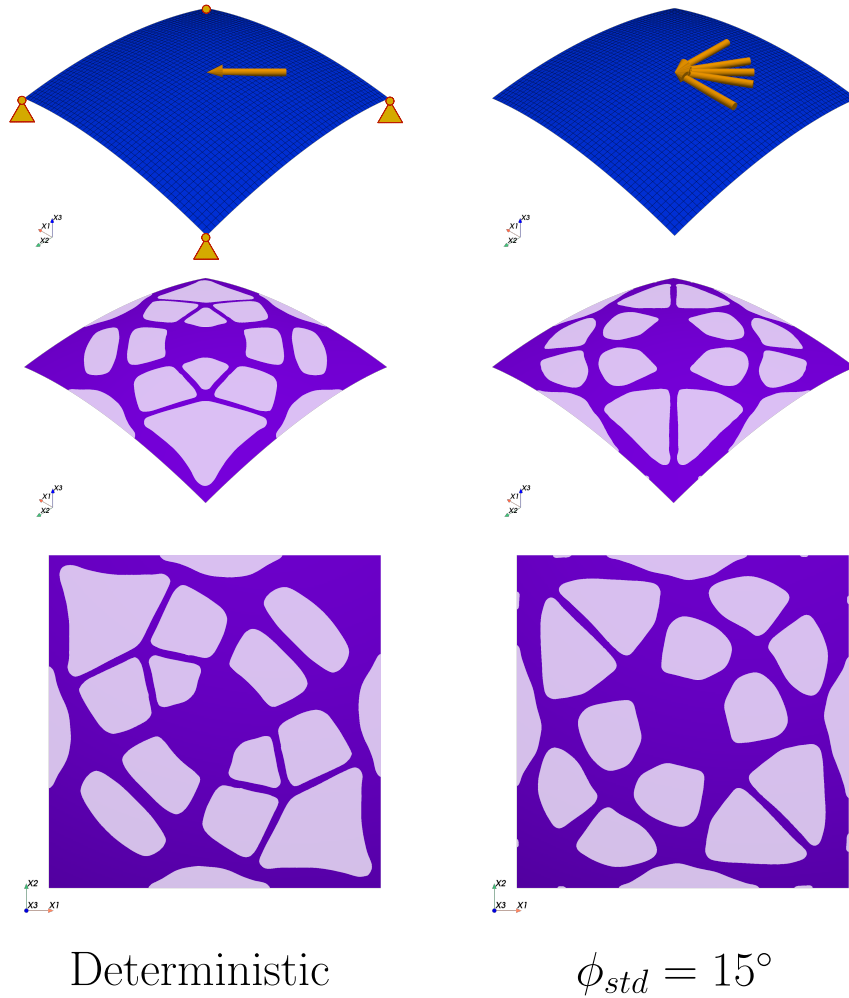


FIGURE 5 – Géométries optimisées pour différents écarts types pour les incertitudes de chargement. Pour visualiser les forces, la moyenne et les intervalles 1σ et 3σ sont mis.

4 Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté une méthode de génération de champs aléatoires gaussiens (GRF) sur des géométries multi-patch complexes via l'IGA. Cette méthodologie permet l'intégration directe des GRF aux problèmes de quantification d'incertitudes pour les coques de Kirchhoff–Love. Cette méthode est présentée dans un article que nous rédigeons actuellement.

De plus, nous avons introduit des résultats préliminaires d'optimisation topologique sous incertitude de chargement.

Dans la continuité de ces travaux, nous viserons à étendre l'optimisation aux cas où les propriétés matériaux sont elles-mêmes modélisées par un champ aléatoire. Les résultats actuels confirment la capacité de notre cadre numérique à traiter efficacement les problèmes d'optimisation topologique robuste.

Notre code sera mis à disposition en tant que logiciel libre.

Remerciements

P. Eisenhardt remercie le soutien de la bourse de l'Institut Polytechnique de Paris. F. Hubner est reconnaissant du support financier et technique de la Chaire Saint-Gobain.

Références

- [1] M. BAUDIN et al. « OpenTURNS : An Industrial Software for Uncertainty Quantification in Simulation ». In : *Handbook of Uncertainty Quantification*. Cham : Springer International Publishing, 2016, p. 1-38. ISBN : 978-3-319-11259-6. DOI : 10.1007/978-3-319-11259-6_64-1.
- [2] S. CHEN, W. CHEN et S. LEE. *Level Set Based Robust Shape and Topology Optimization under Random Field Uncertainties*. In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41.4 (avr. 2010), p. 507-524. ISSN : 1615-147X, 1615-1488. DOI : 10.1007/s00158-009-0449-2.
- [3] M. CROCI et al. *Efficient White Noise Sampling and Coupling for Multilevel Monte Carlo with Nonnested Meshes*. In : *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 6.4 (jan. 2018), p. 1630-1655. ISSN : 2166-2525. DOI : 10.1137/18M1175239.
- [4] Y. EPSHTEYN et B. RIVIÈRE. *Estimation of Penalty Parameters for Symmetric Interior Penalty Galerkin Methods*. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 206.2 (sept. 2007), p. 843-872. ISSN : 03770427. DOI : 10.1016/j.cam.2006.08.029.
- [5] T. J. R. HUGHES, J. A. COTTRELL et Y. BAZILEVS. *Isogeometric Analysis : CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194.39 (2005), p. 4135-4195. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2004.10.008.
- [6] J. KIENDL et al. *Isogeometric Shell Analysis with Kirchhoff-Love Elements*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.49 (2009), p. 3902-3914. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2009.08.013.
- [7] F. LINDGREN, H. RUE et J. LINDSTRÖM. *An Explicit Link between Gaussian Fields and Gaussian Markov Random Fields : The Stochastic Partial Differential Equation Approach*. In : *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* 73.4 (2011), p. 423-498. DOI : 10.1111/j.1467-9868.2011.00777.x.
- [8] J. MARTÍNEZ-FRUTOS et al. *Robust Shape Optimization of Continuous Structures via the Level Set Method*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 305 (2016), p. 271-291. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2016.03.003.
- [9] S. E. MOORE. *Multipatch Discontinuous Galerkin IGA for the Biharmonic Problem On Surfaces*. 2020. DOI : 10.48550/ARXIV.2012.03425.
- [10] P. WHITTLE. *On Stationary Processes in the Plane*. In : *Biometrika* (1954), p. 434-449.
- [11] P. WHITTLE. *Stochastic Processes in Several Dimensions*. In : *Bulletin of the International Statistical Institute* 40 (1963), p. 974-994.
- [12] H. ZHAO et al. *An Open-Source Framework for Coupling Non-Matching Isogeometric Shells with Application to Aerospace Structures*. In : *Computers & Mathematics with Applications* 111 (2022), p. 109-123. ISSN : 0898-1221. DOI : 10.1016/j.camwa.2022.02.007.