

# Optimisation topologique des coques de Kirchhoff–Love avec l’analyse isogéométrique et la méthode des lignes de niveaux

Fernando Hübner<sup>1</sup>, Philipp Eisenhardt<sup>1</sup>, Barbara Wohlmuth<sup>2</sup>, Andrei Constantinescu<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS, IP Paris, École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France, andrei.constantinescu@polytechnique.edu

<sup>2</sup> School for Computation, Information, and Technology, Technische Universität München, Boltzmannstr. 3, 85748 Garching, Allemagne, barbara.wohlmuth@ma.tum.de

**Résumé** — Cet article présente une méthode d’optimisation topologique pour trouver la distribution de matière sur des coques de Kirchhoff–Love isogéométriques en multi-patch non conforme. Elle est basée sur la représentation continue de la géométrie en tant CAO, et son découpage par des fonctions *level set*, modélisées par des surfaces NURBS. La méthode s’appuie sur une dérivée de forme distribuée, un formalisme qui s’adapte au paradigme isogéométrique par l’usage d’un nombre réduit d’éléments, sans avoir recours à des techniques de raffinement local, intégration adaptative ou trimming.

**Mots clés** — Optimisation topologique, analyse isogéométrique, level set, coques de Kirchhoff–Love, multi-patch

## 1 Introduction

Nous présentons une méthode pour l’optimisation topologique de coques de Kirchhoff–Love, produisant des géométries optimales sous format CAO grâce à l’analyse isogéométrique (IGA). La distribution de matière sur la surface moyenne est optimisée par la méthode des lignes de niveau (*level set method*). Comme les formes sont représentées implicitement par des fonctions lignes de niveaux modélisée par des surfaces paramétrées NURBS, la géométrie reste entièrement compatible avec sa définition initiale CAO tout au long du processus d’optimisation.

La méthode est appliquée à la minimisation de la compliance et du volume. Les sensibilités sont calculées via la méthode de vitesse, qui fournit une expression volumique (ou distribuée) de la dérivée de forme, très adapté au formalisme isogéométrique. En effet, l’expression usuelle de la dérivée de forme de la compliance s’écrit comme une intégrale de bord, qui est calculée numériquement par des approximations type de Dirac pour les frontières. Ces approximations peuvent constituer un problème pour le calcul isogéométrique, qui repose sur des discrétisations à nombre d’éléments réduit et degré élevé. L’approche proposée s’appuie donc sur cette expression distribuée, qui permet d’éviter des techniques normalement employées en optimisation topologique en IGA, telles que le raffinement local, la quadrature adaptative ou le trimming. Ce choix implique toutefois une régularité plus élevée pour le calcul des sensibilités, ce qui nécessite une régularisation biharmonique.

## 2 Coques de Kirchhoff–Love en multi-patch non conforme

Nous rappelons la formulation isogéométrique des coques KL proposée dans [8] pour des domaines single-patch, ainsi que son extension aux formulations multi-patch non conformes proposée dans [4, 13]. Par la suite, un formalisme de fonctions lignes de niveaux est introduit à la formulation des coques afin de définir les formes pour le problème d’optimisation.

**Coques de Kirchhoff–Love en single-patch.** Soit  $\mathbf{X} : \hat{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  un champ vectoriel de régularité  $C^3$ , qui à chaque paramètre  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$  associe le point  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi})$  de la surface. La jacobienne de cette paramétrisation est donnée par une matrice  $\hat{F}$  de taille  $3 \times 2$  définie pour tout  $\boldsymbol{\xi} \in \hat{\mathcal{D}}$  par  $\hat{F}_{i\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \xi^\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ . L’application  $\mathbf{X}$  induit également le tenseur métrique  $\hat{G}_{\alpha\beta}$ , aussi appelé première forme fondamentale, défini par  $\hat{G}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{F}^T(\boldsymbol{\xi})\hat{F}(\boldsymbol{\xi})$ . Dans le formalisme des coques de Kirchhoff–Love, on considère  $\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2)$  comme la surface moyenne non déformée de la coque. Sur cette surface, les bases covariantes  $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$

de la configuration initiale sont donnée par

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{X}_{,\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|}. \quad (1)$$

Les vecteurs de base contravariants  $\{\mathbf{A}^i\}_{i=1}^3$  sont définis à partir de leurs homologues covariants par les relations  $\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta_\beta^\alpha$  and  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3$ , où  $\delta_\beta^\alpha$  désigne le symbole de Kronecker. Les *symboles de Christoffel* de seconde espèce associés à la surface sont alors donnés par  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}^\lambda$ .

La déformation de la coque est décrite par un champ de déplacement  $\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2)$ , qui relie la géométrie déformée  $\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2)$  à la configuration initiale via  $\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2)$ . Sur la géométrie déformée, les bases covariantes s'expriment en fonction de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_{,\alpha}(\mathbf{u}) = \mathbf{X}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha}$ .

Le tenseur de déformation de Green–Lagrange se décompose en une contribution membranaire et une en flexion. Dans cet article, nous travaillons sous l'hypothèse de petits déplacements, ce qui permet d'utiliser les expressions linéarisées du tenseur de *déformation de membrane* et de la *déformation de flexion*, qui sont respectivement :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}) \quad \text{et} \quad \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\mathbf{A}_3 \cdot \left( \mathbf{u}_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{u}_{,\lambda} \right). \quad (2)$$

En supposant un matériau homogène, linéaire et isotrope, de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , le tenseur d'élasticité  $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$  s'exprime en fonction de l'inverse du tenseur métrique comme

$$C^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( G^{\alpha\lambda} G^{\beta\mu} + G^{\alpha\mu} G^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} G^{\alpha\beta} G^{\lambda\mu} \right), \quad (3)$$

**Formulation multi-patch pénalisée.** La formulation single-patch présentée précédemment est étendue à une formulation multi-patch pénalisée. Soit  $\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$  une collection de  $K$  sous-domaines ouverts paramétrés par des NURBS, deux à deux disjoints, définissant une partition de la surface globale  $\mathcal{D}$  avec

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{k=1}^K \overline{\mathcal{D}}_k, \quad \text{avec } \mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_l = \emptyset \text{ lorsque } k \neq l. \quad (4)$$

Les interfaces non vides entre patchs voisins sont représentées par des paires d'indices  $(k, l)$  dans un ensemble d'indices  $I$ , de sorte que la frontière entre les patchs  $\mathcal{D}_k$  et  $\mathcal{D}_l$  s'écrit  $\gamma_{kl} = \partial\mathcal{D}_k \cap \partial\mathcal{D}_l$ . Sur les bords  $\partial\mathcal{D}_k$ , nous notons  $\mathbf{A}_T^{(k)}$  et  $\mathbf{A}_N^{(k)}$  les vecteurs tangents et normaux, qui sont liés par la relation  $\mathbf{A}_N^{(k)} = \mathbf{A}_T^{(k)} \times \mathbf{A}_3^{(k)}$ .

Les champs et opérateurs différentiels décrits dans la section précédente sont ici indexés par patch. En l'occurrence, les champs de déplacement s'écrivent désormais  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=1}^K$ , répartis dans les sous-espaces locaux  $H_D^1(\mathcal{D}_k)$ . Ainsi, la contribution en rigidité de l'ensemble des surfaces multi-patch est donnée par la forme bilinéaire  $a^{\text{mp}} : (\prod_k H_D^2(\mathcal{D}_k))^2 \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$a^{\text{mp}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{k=1}^K \int_{\mathcal{D}_k} \left( h \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(k)}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^{(k)}) + \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}^{(k)}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{v}^{(k)}) \right),$$

où  $h$  désigne l'épaisseur de la coque, supposée constante.

Pour imposer la continuité  $C^1$  aux interfaces non conformes, une approche par pénalité suivant [4] est adoptée, dont l'implémentation numérique est basée sur [13]. Deux termes de pénalisation sont introduits : l'un sur les déplacements, l'autre sur les rotations.

La *pénalisation des déplacements* est imposée à l'aide d'un paramètre de pénalité suffisamment grand  $\alpha_D > 0$  et de la différence de la trace des déplacements aux interfaces entre les patchs. Elle peut ainsi être exprimée sous la forme d'une forme bilinéaire  $a^{\text{pd}}$  donnée par

$$a^{\text{pd}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{(k,l) \in I} \int_{\gamma_{kl}} \alpha_D \left( \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(l)} \right) \cdot \left( \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}^{(l)} \right).$$

La *pénalisation des rotations* est formulée de sorte à conserver l'angle entre deux patchs voisins. Pour un facteur de pénalité suffisamment grand  $\alpha_R > 0$ , cet effet est pris en compte par la forme bilinéaire  $a^{\text{pr}}$  définie par

$$a^{\text{pr}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{(k,l) \in I} \int_{\gamma_{kl}} \alpha_R \left[ \left( \mathbf{a}_3^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}_3^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) - \mathbf{A}_3^{(k)} \cdot \mathbf{A}_3^{(l)} \right) \left( \mathbf{a}_3^{(k)}(\mathbf{v}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}_3^{(l)}(\mathbf{v}^{(l)}) \right) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{a}_N^{(k)}(\mathbf{u}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}_3^{(l)}(\mathbf{u}^{(l)}) - \mathbf{A}_N^{(k)} \cdot \mathbf{A}_3^{(l)} \right) \left( \mathbf{a}_N^{(k)}(\mathbf{v}^{(k)}) \cdot \mathbf{a}_3^{(l)}(\mathbf{v}^{(l)}) \right) \right].$$

La formulation variationnelle est dérivée de l'équation d'équilibre, sur la base du principe des travaux virtuels. L'action des forces externes est modélisée par un champ de traction multi-patch  $\mathbf{g} = \{\mathbf{g}^{(k)}\}$  sur les régions de Neumann  $\{\partial \mathcal{D}_{N_k}\} \subset \{\partial \mathcal{D}_k\}$ . L'élasticité linéaire s'écrit alors sous la forme du problème variationnel suivant.

**Problème 1 (Elasticité linéaire d'une coque Kirchhoff–Love en multi-patch).** Trouver le champ de déplacements  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^{(k)}\} \in \prod_{k=1}^K H_D^2(\mathcal{D}_k)$  tel que :

$$a^{\text{mp}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^{\text{pd}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^{\text{pr}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^K \int_{\partial \mathcal{D}_{N_k}} \mathbf{g}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)}, \quad (5)$$

pour tout  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}^{(k)}\} \in \prod_k H_D^2(\mathcal{D}_k)$ .

## 2.1 Les formes définies par des fonctions level set

Le cadre utilisé pour définir une forme multi-patch  $\Omega \subset \mathcal{D}$  via la méthode des fonctions lignes de niveaux suit la formulation proposée dans [5], qui est brièvement rappelé ici.

Soit  $\mathbf{X}_k$  la paramétrisation de la surface du patch  $k$  de surface moyenne  $\mathcal{D}_k = \mathbf{X}_k(\hat{\mathcal{D}}_k)$ , et soit  $\phi_k$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $\mathcal{D}_k$ . La *phase matérielle* est introduite comme l'ensemble

$$\Omega_k = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_k : \phi_k(\mathbf{x}) < 0\}, \quad (6)$$

qui représente la distribution de matière sur le patch  $\mathcal{D}_k$  que l'on cherche à optimiser. Numériquement, il est intéressant d'exprimer cet ensemble par une forme bidimensionnelle  $\hat{\Omega}_k \subset \mathbb{R}^2$ , la *phase matérielle paramétrique*, décrite par l'opérateur *pullback* de  $\phi_k$  :

$$\hat{\Omega}_k = \{\boldsymbol{\xi} \in \hat{\mathcal{D}}_k : \hat{\phi}_k(\boldsymbol{\xi}) = \phi_k(\mathbf{X}_k(\boldsymbol{\xi})) < 0\} = \mathbf{X}_k^{-1}(\Omega_k). \quad (7)$$

Suite à l'introduction d'une collection de fonctions de niveau  $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^K$ , une suite de formes  $\{\Omega_k\}_{k=1}^K$  est naturellement induite par l'équation 6. L'union des formes single-patch  $\Omega_k$  définit la forme multi-patch globale  $\Omega$  avec

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k. \quad (8)$$

Pour garder la représentation des géométries en tant que CAO, la surface définie par le graphe de l'opérateur pullback  $\hat{\phi}_k$ , illustré dans la figure 1, est modélisée numériquement comme une NURBS. En calculant l'intersection de ces surfaces avec le plan de niveau zéro, on obtient les courbes de découpe, définissant les formes  $\{\Omega_k\}$  comme des surfaces découpées.

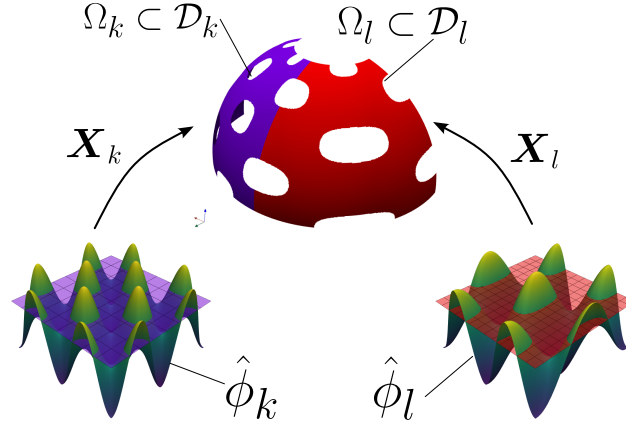


FIGURE 1 – Définition des formes tridimensionnelles à partir des fonctions de niveau à deux dimensions.

**Evolution temporelle des formes.** Les formes multi-patch  $\Omega$  sont soumises à une évolution au cours d'un pseudo-temps à chaque itération de l'optimisation. Cette évolution est réalisée par advection des fonctions level set dans une direction de descente  $\theta = \{\theta_k\}$ . Ce champ vectoriel, interprété comme un champ de vitesse, est associé à la dérivée de forme de la fonction coût via un problème d'identification qui sera présenté à la Section 4. À la fin de chaque itération de l'optimisation, les fonctions de niveau servent de condition initiale pour l'équation d'advection. La solution de cette équation à un pseudo-temps final prescrit définit la nouvelle forme pour l'itération suivante. Ce système d'équations est discrétisé en utilisant un schéma aux différences finies, de manière analogue à [5].

### 3 Dérivée de forme avec la méthode des vitesses

**Motivation.** Dans cette étude, nous proposons une représentation distribuée (ou tensorielle) de la dérivée de forme pour les coques de Kirchhoff–Love, obtenue via la méthode de vitesse [11]. Contrairement à la méthode des vitesses, la méthode classique de Cea [2, 1] aboutit à des expressions de la dérivée de forme comme une intégrale de bord, ce qui entraîne l'usage des approximations de type Dirac sur  $\partial\Omega$  dans la pratique numérique. Ces approximations sont naturelles en éléments finis classique, mais ne se prêtent pas directement au paradigme isogeométrique, qui s'appuie sur des discrétisations avec un nombre réduit d'éléments et un degré d'interpolation élevé. Ainsi, de nombreuses études font appel à des techniques de raffinement local, intégration sélective ou de trimming pour améliorer la qualité de la solution au niveau des bords [3, 7]. Pour éviter cette difficulté, on décide d'utiliser la dérivée de forme sous forme d'intégrale volumique, suivant [9, 12]. Cette formulation s'adapte naturellement à l'IGA, ne nécessite ni maillage très raffiné ni traitement particulier près des frontières, et se montre suffisamment robuste en pratique numérique, même avec des discrétisations relativement grossières.

**La méthode de vitesse pour des surfaces paramétrées.** Dans la *méthode des vitesses* (*speed method*), la sensibilité de la fonction coût est obtenue en appliquant des perturbations sur les formes  $\Omega$  à l'aide d'un champ de vitesse. Les points du domaine paramétrique sont soumis à un tel champ, défini dans l'espace fonctionnel suivant :

$$\hat{\Theta}(\hat{\mathcal{D}}) = \{\hat{\boldsymbol{v}} \in C_c^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) : \hat{\boldsymbol{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}|_{\partial\hat{\mathcal{D}}} = 0\}, \quad (9)$$

où  $\hat{\boldsymbol{n}}$  désigne le champ de vecteurs unitaires bidimensionnels normaux sortants sur  $\partial\hat{\mathcal{D}}$ .

Soit  $\hat{\boldsymbol{v}} = \hat{v}^\alpha \hat{\boldsymbol{e}}_\alpha \in \hat{\Theta}(\hat{\mathcal{D}})$ , avec  $\{\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha\}$  la base canonique usuelle de  $\mathbb{R}^2$ . Les points sont transformés dans une configuration perturbée via la fonction  $T_t^\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , définie par  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \in \hat{\Omega} \mapsto T_t^\theta(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\xi}_t = ((\xi_t^1)^1, (\xi_t^1)^2)$  où  $\boldsymbol{\xi}_t : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la solution de l'EDO :

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\xi}_t = \hat{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{\xi}_t) \quad (10)$$

La forme déformée  $\Omega_t$  est alors définie comme l'image directe du domaine  $\hat{\Omega}$  par  $T_t^\theta$ , avec  $\hat{\Omega}_t = T_t^\theta(\hat{\Omega})$ .

La forme paramétrique perturbée  $\hat{\Omega}_t$  définit la forme physique perturbée par l'image directe de la paramétrisation de surface  $\mathbf{X}$  :

$$\Omega_t = \mathbf{X}(\hat{\Omega}_t). \quad (11)$$

Dans cet article, la dérivée de forme est formulée en fonction d'une variation dans l'espace paramétrique, en adaptant la définition usuelle de la méthode de la vitesse, comme dans [11]. Pour obtenir une formulation intuitive basée sur le domaine physique, un champ de perturbation représentant  $\hat{\boldsymbol{\nu}}$  est introduit avec  $\hat{\boldsymbol{\theta}} := \hat{\boldsymbol{\nu}}^\alpha \hat{\mathbf{A}}_\alpha$ . Il s'écrit également sous forme matricielle  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{F}} \hat{\boldsymbol{\nu}}$  et peut être inversé par  $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \hat{\mathbf{G}}^{-1} \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Le champ vectoriel  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  est tangent à la surface  $\mathcal{D}$ , et son pushforward  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \circ \mathbf{X}^{-1}$  appartient à l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{T}(\mathcal{D}) = \left\{ (\hat{\mathbf{F}} \hat{\boldsymbol{\nu}}) \circ \mathbf{X}^{-1} : \text{pour } \hat{\boldsymbol{\nu}} \in \hat{\boldsymbol{\Theta}}(\hat{\mathcal{D}}) \right\}. \quad (12)$$

Avec cette construction, la dérivée de forme peut être formulée de manière équivalente à [11] en termes d'un champ tangent représentant  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$  de la manière suivante.

**Définition 1 (Dérivée de forme).** Soit  $\mathcal{J} : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction coût.

- (i) La semi-dérivée eulérienne de  $\mathcal{J}$  en  $\Omega$  dans la direction  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$ , lorsque la limite existe, est définie par

$$d\mathcal{J}(\Omega; \boldsymbol{\theta}) := \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega)}{t}$$

- (ii) La fonction  $\mathcal{J}$  est différentiable par rapport à la forme en  $\Omega$  si elle possède une semi-dérivée eulérienne en  $\Omega$  pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$  et si l'application  $\mathcal{J}'(\Omega) : \mathcal{T}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\theta} \mapsto \mathcal{J}'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = d\mathcal{J}(\Omega; \boldsymbol{\theta})$  est linéaire et continue. Dans ce cas  $\mathcal{J}'(\Omega)(\boldsymbol{\theta})$  est appelée dérivée de forme de  $\mathcal{J}$  en  $\Omega$  dans la direction de  $\boldsymbol{\theta}$ .

## 4 Problème d'optimisation

L'ensemble des formes admissibles sera défini par

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \Omega \subset \mathcal{D} : \partial \mathcal{D}_N = \partial \Omega_N \quad \text{et} \quad \partial \Omega_D \subset \partial \mathcal{D}_D \}, \quad (13)$$

ce qui implique que les régions où les forces sont appliquées doivent toujours faire partie de la forme  $\Omega$  et que le problème mécanique doit rester bien posé.

Le problème d'optimisation est formulé comme une minimisation simultanée de la compliance et du volume. Un paramètre fixé  $\Lambda > 0$  est introduit pour moduler ces deux quantités dans la fonction coût combinée  $\mathcal{J}(\Omega)$ , comme formulé dans le problème d'optimisation suivant.

**Problème 2 (Problème d'optimisation).** Trouver la forme  $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$  telle que

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ \underbrace{\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} \left( h \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) \right)}_{\text{compliance}} + \Lambda \underbrace{\int_{\Omega} d\mathbf{X}}_{\text{volume}} \right\}, \quad (14)$$

$$\text{Soumis au Problème 1.} \quad (15)$$

La dérivée de forme de la fonction coût  $\mathcal{J}(\Omega)$  est calculée à partir de la Définition 1 suivant une approche lagrangienne. Ce calcul conduit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = & h \int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \dot{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ & + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) : \dot{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\theta}} : \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) - 2\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ & + \Lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (16)$$

pour tout champ  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$  et où les expressions de  $\dot{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{\theta}}$ , et  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{\theta}}$  sont omises dans ce résumé.

**Direction de descente : problème de régularisation biharmonique.** La direction de descente est obtenue par un problème d'identification via le théorème de représentation de Riesz. L'objectif est de trouver l'élément  $\theta \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$  qui est associé à la dérivée de forme (i.e. une forme linéaire) par un produit scalaire, à savoir :

$$(\theta, v) = -\mathcal{J}'(\Omega)(v), \quad \forall v \in \mathcal{T}(\mathcal{D}). \quad (17)$$

L'expression de la dérivée de forme obtenue dans ce travail via la méthode des vitesses, fait intervenir des dérivées secondes du champ de vitesse à cause du terme de flexion  $\kappa^\theta$ . Suite à cette régularité supplémentaire requise, la régularisation se fait avec un produit scalaire de  $H^2$ , ce qui définit un problème biharmonique. On cherche à trouver la direction de descente  $\theta \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$  telle que :

$$\int_{\mathcal{D}} (\alpha_B \Delta_{\mathcal{D}} \theta \cdot \Delta_{\mathcal{D}} v + \alpha_H \nabla_{\mathcal{D}} \theta \cdot \nabla_{\mathcal{D}} v + \theta \cdot v) = -\mathcal{J}'(\Omega)(v), \quad \forall v \in \mathcal{T}(\mathcal{D}), \quad (18)$$

où  $\alpha_B = h_{\text{elem}}^4 > 0$  et  $\alpha_H = 2h_{\text{elem}}^2 > 0$  sont des paramètres dépendant de la discrétisation, choisis numériquement en fonction d'un facteur de la taille de l'élément, typiquement  $2h_{\text{elem}}$ . En raison du caractère défini positif de la forme bilinéaire de régularisation, le champ  $\theta$  correspondra à une direction de descente. Par simplicité, la formulation multi-patch de ce problème biharmonique est omise. Son implémentation numérique repose sur une méthode Galerkin à pénalité intérieure symétrique (SIPG) comme proposée dans [10].

## 5 Résultats numériques

L'implémentation numérique de l'approche décrite est basée sur le projet TIGAR [6], qui s'appuie sur l'extraction de Bézier. L'implémentation des coques Kirchhoff–Love en multi-patch non conforme a été proposée dans [13], rendu publique grâce au package PENGOLINS.

**Exemple 1 : cantilever avec sollicitation membrane pure et flexion pure.** L'approche est testée sur l'exemple classique du cantilever sur deux chargements distincts, avec une discrétisation de  $30^2$  éléments par patch. À gauche de la figure 2, la forme optimale obtenue pour un chargement vertical dans le plan est montrée sur une géométrie de deux patches non conformes. À droite, l'optimum pour un cas de chargement en flexion pure est présenté.

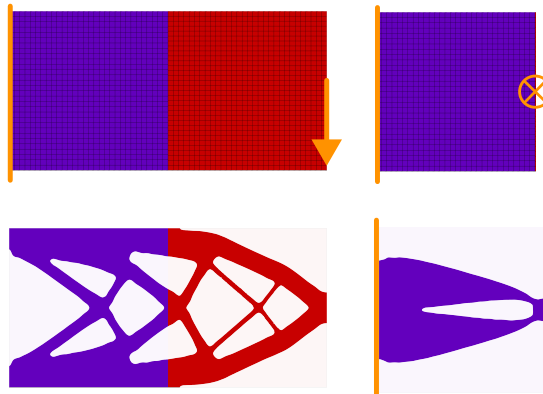


FIGURE 2 – Les formes optimales du cantilever pour une force dans et hors plan.

**Exemple 2 : double parabola.** L'efficacité de la méthode sur des surfaces courbes est montrée avec l'optimisation d'une double parabole. L'influence de l'orientation du chargement  $\mathbf{g}$  est analysée sur trois orientations distinctes, à savoir  $[0, 0, -1]$ ,  $[-1, 0, 0]$  et  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ , comme illustré dans la figure 3.

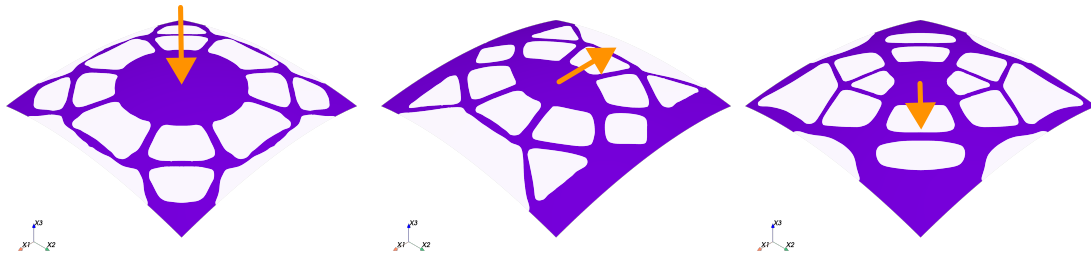


FIGURE 3 – Les formes optimales sur la surface d’une double parabole.

**Exemple 3 : cylindre multi-patch sous chargement de torsion.** Afin de valider les connexions multi-patch sur des surfaces courbes, une géométrie cylindrique est considérée. Quatre patches représentant des quarts de cylindre sont soumis à un chargement de torsion, comme dans la figure 4. Une discrétisation relativement grossière de  $40 \times 15$  éléments est utilisée.

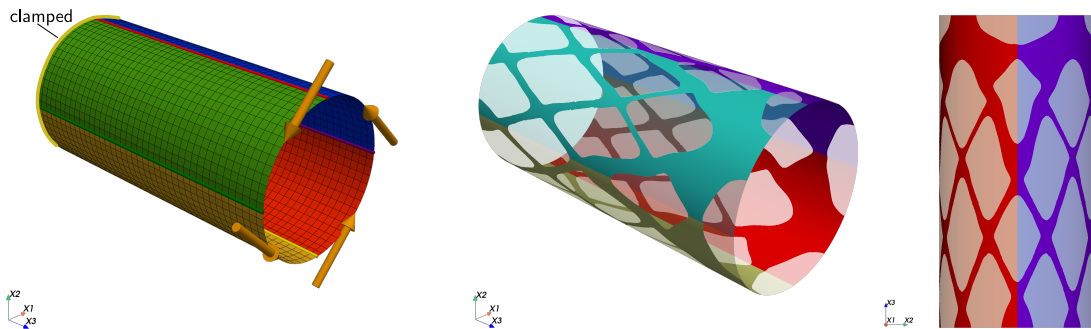


FIGURE 4 – Cylindre en torsion : chargement, condition de bord et forme optimale associée.

## 6 Conclusion

Ce travail présente une méthode d’optimisation de la distribution de matière sur la surface moyenne des coques de Kirchhoff–Love multi-patch non conformes, qui produit des formes optimales définies par des géométries CAO. L’approche repose sur une expression distribuée (volumique) de la dérivée de forme, mieux adaptée à l’IGA et à ses discrétisations relativement grossières, évitant ainsi les approximations de type Dirac et les techniques classiques de trimming, raffinement local ou intégration sélective. Cette simplification exige toutefois une régularisation plus élevée : un terme en  $H^2$  conduit à résoudre un problème biharmonique de régularisation sur la surface. Malgré cette contrainte supplémentaire, la méthode reproduit des résultats de la littérature tout en utilisant généralement moins d’éléments que les approches FEM ou IGA raffinées.

## 7 Remerciements

F. Hubner est reconnaissant du support financier et technique de la Chaire Saint-Gobain. P. Eisenhardt remercie le soutien de la bourse de l’Institut Polytechnique de Paris.

## Références

- [1] G. ALLAIRE. *Conception Optimale de Structures*. Springer Berlin Heidelberg, jan. 2007. DOI : 10.1007/978-3-540-36856-4.
- [2] G. ALLAIRE, F. JOUVE et A.-M. TOADER. *Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method\* 1*. In : *Journal of Computational Physics* 194 (fév. 2004), p. 363-393. DOI : 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [3] S. CAI, H. ZHANG et W. ZHANG. *An Integrated Design Approach for Simultaneous Shape and Topology Optimization of Shell Structures*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 415 (oct. 2023), p. 116218. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2023.116218.

- [4] A. J. HERREMA et al. *Penalty Coupling of Non-Matching Isogeometric Kirchhoff–Love Shell Patches with Application to Composite Wind Turbine Blades*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 346 (avr. 2019), p. 810-840. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2018.08.038.
- [5] F. HÜBNER SCHERER et al. *Topology Optimization of Curved Thick Shells Using Level Set Method and Non-Conforming Multi-Patch Isogeometric Analysis*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 430 (oct. 2024), p. 117205. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2024.117205.
- [6] D. KAMENSKY et Y. BAZILEVS. *tIGAr : Automating Isogeometric Analysis with FEniCS*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 344 (2019), p. 477-498. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2018.10.002.
- [7] P. KANG et S.-K. YOUN. *Isogeometric Topology Optimization of Shell Structures Using Trimmed NURBS Surfaces*. In : *Finite Elements in Analysis and Design* 120 (nov. 2016), p. 18-40. DOI : 10.1016/j.finel.2016.06.003.
- [8] J. KIENDL et al. *Isogeometric Shell Analysis with Kirchhoff–Love Elements*. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.49 (2009), p. 3902-3914. ISSN : 0045-7825. DOI : 10.1016/j.cma.2009.08.013.
- [9] A. LAURAIN. *A Level Set-Based Structural Optimization Code Using FEniCS*. In : *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58 (mai 2017). DOI : 10.1007/s00158-018-1950-2.
- [10] S. E. MOORE. *Multipatch Discontinuous Galerkin IGA for the Biharmonic Problem On Surfaces*. 2020. DOI : 10.48550/ARXIV.2012.03425.
- [11] J. SOKOLOWSKI et J.-P. ZOLESIO. *Introduction to Shape Optimization : Shape Sensitivity Analysis*. 1<sup>re</sup> éd. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1992. ISBN : 978-3-540-54177-6. DOI : 10.1007/978-3-642-58106-9.
- [12] K. STURM et A. LAURAIN. *Distributed Shape Derivative via Averaged Adjoint Method and Applications*. In : *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 50 (sept. 2015). DOI : 10.1051/m2an/2015075.
- [13] H. ZHAO et al. *An Open-Source Framework for Coupling Non-Matching Isogeometric Shells with Application to Aerospace Structures*. In : *Computers & Mathematics with Applications* 111 (2022), p. 109-123. ISSN : 0898-1221. DOI : 10.1016/j.camwa.2022.02.007.