

# Prise en compte de l'isotropie dans la méthode *Data-Driven Identification*

N. Hachem, A. Leygue, L. Stainier

Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS, GeM, UMR 6183, 44000 Nantes, France  
{nour.hachem, adrien.leygue, laurent.stainier}@ec-nantes.fr

**Résumé** — La méthode *Data-Driven Identification* permet d'identifier la réponse mécanique du matériau sans postuler un modèle de comportement. Nous proposons une version adaptée au cas isotrope, qui reformule la régularisation dans l'espace des grandeurs principales afin que le *clustering* tienne compte de la structure mécanique du matériau et non plus seulement de la géométrie des données. Cette réduction d'espace améliore la cohérence physique de l'identification.

**Mots clés** — Data-Driven, Identification, Isotrope, Problème inverse.

## 1 Introduction

La méthode d'identification non-paramétrique (*DDI : Data-Driven Identification*) introduite par Leygue *et al.* [7], permet d'estimer les champs de contraintes à partir des mesures de champs de déformation et des résultantes d'efforts appliqués, sans postuler à priori un modèle de comportement. Les principaux résultats (sorties) fournis par la méthode DDI sont le champ de contraintes statiquement admissible sur l'échantillon étudié et une représentation discrète de la relation constitutive identifiée à partir des mesures des champs [3] de déplacement et de déformation, typiquement obtenues par corrélation d'images numériques (DIC). La méthode s'appuie sur la disponibilité de données hétérogènes et suffisamment riches, qui sont regroupées pour construire une base de données déformation-contrainte. Cette base de paires admissibles échantillonne la réponse mécanique du matériau et s'inspire de la méthode *Data-Driven Computational Mechanics* (DDCM) [5]. À partir des champs de déplacements et de déformations, la DDI résout un problème inverse fondé sur le principe selon lequel des déformations similaires doivent produire des contraintes similaires. Pour ce faire, la méthode minimise la distance entre l'état mécanique mesuré et son représentant dans la base de données sous contraintes d'équilibre.

La méthode DDI a été appliquée à plusieurs types de comportements mécaniques, chacun nécessitant un choix d'espace constitutif approprié. Pour un matériau élastique [7], l'espace déformation-contrainte est suffisant, pour un matériau viscoélastique [10], un espace élargi intégrant l'historique des déformations s'impose, et pour des comportements plastiques [6], d'autres espaces enrichis ont été proposés dans la littérature.

Dans ce travail, nous présentons la méthode DDI pour les comportements isotropes en adaptant le choix de l'espace constitutif, que nous construisons sous la forme d'un espace réduit fondé sur les grandeurs principales. Ce choix permet de travailler dans un cadre plus compact et mieux organisé du point de vue physique. Dans la suite de ce document, la méthode DDI adaptée au cas isotrope est présentée dans la section 2. Des résultats sur données synthétiques, accompagnés d'une discussion, sont ensuite présentés dans la section 3.

## 2 Méthode *Data-Driven Identification* pour les comportements isotropes

Dans cette section, nous présentons une version spécialisée de la méthode de *Data-Driven Identification*, adaptée au cas des comportements isotropes. Cette variante sera désignée par la suite sous le nom d'*Isotropic Data-Driven Identification* (I-DDI). Nous introduisons d'abord les hypothèses sous lesquelles la méthode est applicable, puis nous formulons le problème dans ce cadre spécialisé, avant de décrire la procédure de calcul de la solution. Les équations sont exprimées après discrétisation à l'aide

d'un maillage d'éléments finis comportant  $m$  points de quadrature et  $n$  nœuds.

Le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Leygue *et al.* (2018) [7] et Leygue (2025) [8] pour une présentation détaillée de la DDI.

## 2.1 Hypothèses et définitions

Pour des raisons de simplicité analytique, la cinématique est restreinte au cadre linéaire, et la déformation est décrite par le tenseur linéarisé  $\varepsilon$ . Ce choix n'est pas une restriction intrinsèque de la méthode DDI, qui peut être étendue à des cadres de comportements plus complexes en remplaçant  $\varepsilon$  par une mesure de déformation adaptée, comme le tenseur de Hencky utilisé dans [2]. Cette section est basée sur les références [1, 9].

**Hypothèse 1.** *Le matériau est supposé hyperélastique, c'est-à-dire que la contrainte dérive d'un potentiel d'énergie. Autrement dit, il existe une énergie  $W$  telle que*

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}. \quad (1)$$

**Hypothèse 2.** *Le matériau est supposé isotrope, c'est-à-dire que son comportement est indépendant de la direction considérée. En d'autres termes, sa réponse mécanique est invariante par rotation matérielle.*

**Définition 1** (Coaxialité). *Deux tenseurs symétriques sont dits coaxiaux lorsqu'ils possèdent les mêmes directions propres (vecteurs propres).*

Pour les matériaux hyperélastiques isotropes, les tenseurs de déformation et de contrainte sont coaxiaux. En effet, dans ce cadre, l'isotropie s'exprime par l'invariance du potentiel d'énergie sous rotation matérielle, ce qui impose que

$$W(Q^\top \varepsilon Q) = W(\varepsilon), \quad \forall Q \in O(d), \quad (2)$$

où  $Q$  est un tenseur d'ordre 2 (représentable par une matrice  $d \times d$ ), et  $O(d)$  désigne l'ensemble des matrices orthogonales en dimension  $d$  avec  $d \in \{2, 3\}$ . En posant  $e = Q^\top \varepsilon Q$  et en utilisant (1) et (2), on obtient alors

$$\sigma(e) = \frac{\partial W(e)}{\partial e} = Q^\top \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} Q, \quad \forall Q \in O(d). \quad (3)$$

On en déduit finalement

$$\sigma(Q^\top \varepsilon Q) = Q^\top \sigma Q, \quad \forall Q \in O(d). \quad (4)$$

L'idée sous-jacente à l'I-DDI est alors d'exploiter l'invariance du comportement sous rotation pour choisir librement le repère sans affecter la réponse mécanique. On peut ainsi se placer dans la base propre du tenseur de déformation  $\varepsilon$ , dans laquelle il est diagonal. L'isotropie implique alors que le tenseur des contraintes  $\sigma$  possède les mêmes directions principales, ce qui conduit à une forme diagonale de  $\sigma$  dans ce même repère. Avec ce changement de repère, l'espace constitutif  $(\varepsilon, \sigma)$  est transformé en un espace constitutif réduit  $(e, s)$ , défini par

$$e = Q^\top \varepsilon Q, \quad s = Q^\top \sigma Q, \quad (5)$$

où  $Q$  désigne la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs propres de  $\varepsilon$ .

**Remarque 1.** *Le tenseur  $e$  est diagonal par construction. Le tenseur  $s$  n'est pas imposé diagonal a priori, mais, si les calculs sont corrects, sa diagonalité résulte directement de la coaxialité entre  $\varepsilon$  et  $\sigma$ .*

## Notations indicielles

La notation indicielle suivante est utilisée :

- $\bullet_j$  désigne une quantité évaluée au point d'intégration  $j$ , avec  $j \in \{1, \dots, m\}$ .
- $\bullet_k$  désigne une quantité au nœud  $k$ , avec  $k \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\bullet_i$  se réfère à une quantité associée à l'état matériau  $i$ , avec  $i \in \{1, \dots, N_{\mathcal{D}}\}$ .
- Les indices primés (p.e.  $j', k', i'$ ) sont utilisés comme indices muets de sommation.

## 2.2 Formulation

Pour la formulation du problème de régularisation, l'intuition reste identique à celle de la DDI classique, mais elle s'exprime dans l'espace constitutif réduit défini ci-dessus. Ainsi, des déformations principales  $e$  similaires conduisent à des contraintes similaires dans la base propre de  $\varepsilon$ , sous la contrainte d'équilibre mécanique. Autrement dit, ce que la DDI exprime en termes de proximité entre paires  $(\varepsilon, \sigma)$  se traduit ici par une proximité entre paires  $(e, s)$  dans le repère diagonal.

La méthode s'appuie sur les données d'entrée suivantes :

- l'opérateur discret de divergence  $\mathbf{D}_{kj}$ ,  $\forall k \in 1, \dots, n$ ,  $\forall j \in 1, \dots, m$ ,
- le vecteur des forces externes  $\mathbf{f}_k$ ,  $\forall k \in 1, \dots, n$ ,
- la déformation à tous les points de quadrature,  $\varepsilon_j$ ,  $\forall j \in 1, \dots, m$ .

L'admissibilité statique s'exprime alors sous la forme :

$$\sum_{j'=1}^m \mathbf{D}_{kj'} \cdot \sigma_{j'} = \mathbf{f}_k \quad \forall k. \quad (6)$$

On introduit :

- La base de données matériaux  $\mathcal{D}$ , qui échantillonne le comportement du matériau en  $N_{\mathcal{D}}$  clusters ou états matériaux :

$$\mathcal{D} = \{(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)\}_{i=1, \dots, N_{\mathcal{D}}}. \quad (7)$$

- La matrice d'appariement  $P \in \{0, 1\}^{m \times N_{\mathcal{D}}}$ , définie par :

$$\begin{aligned} P_{ji} &= 1 \text{ si l'état mécanique } j \text{ est associé à l'état matériau } i, \\ P_{ji} &= 0 \text{ sinon,} \\ \sum_{i'=1}^{N_{\mathcal{D}}} P_{ji'} &= 1 \quad \forall j. \end{aligned} \quad (8)$$

- Les poids  $w_j$ , associés aux  $m$  points de quadrature.
- L'opérateur métrique dans l'espace constitutif réduit  $(e, s)$ , défini via un tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{C}$ . Pour plus de détails concernant la norme associée, voir [5, 7].

On note finalement que la base de données matériaux ainsi que la matrice d'appariement  $P$  constituent des inconnues du problème.

La fonction coût  $\mathcal{F}$  du problème est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s_j, \mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i, P_{ji}) &= \frac{1}{2} \sum_{j'} w_{j'} \left( e_{j'} - \sum_{i'} P_{ji'} \mathcal{E}_{i'} \right) : \mathbb{C} : \left( e_{j'} - \sum_{i'} P_{ji'} \mathcal{E}_{i'} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j'} w_{j'} \left( s_{j'} - \sum_{i'} P_{ji'} \mathcal{S}_{i'} \right) : \mathbb{C}^{-1} : \left( s_{j'} - \sum_{i'} P_{ji'} \mathcal{S}_{i'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j'} w_{j'} \left\| (e_{j'}, s_{j'}) - \sum_{i'} P_{ji'} (\mathcal{E}_{i'}, \mathcal{S}_{i'}) \right\|_{\mathbb{C}}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

On minimise la distance entre les contraintes mécaniques dans la pièce et leur plus proche représentant dans la base de donnée matériau. La fonction coût peut également être exprimée en fonction de  $(\varepsilon, \sigma)$  via l'équation (5). Le problème de minimisation associé s'écrit alors

$$(\sigma_j, \mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i, P_{ji}) = \arg \min \mathcal{F}(\sigma'_j, \mathcal{E}'_i, \mathcal{S}'_i, P'_{ji}), \quad (10)$$

sous la contrainte d'équilibre mécanique donnée par l'équation (6).

Les tenseurs  $\varepsilon$  et  $\sigma$  sont transformés conformément à (5), et la base de données est construite dans le repère tourné  $(e, s)$ .

Les paramètres de la méthode sont : le scalaire  $N_{\mathcal{D}}$  correspondant au nombre de clusters, le tenseur  $\mathbb{C}$  qui intervient dans la définition de la norme, ainsi que les poids  $w_j$ .

**Hypothèse 3.** On suppose que le tenseur  $\mathbb{C}$  est isotrope, i.e.  $\|(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})\|_{\mathbb{C}} = \|(e, s)\|_{\mathbb{C}}$ . Dans la suite, on prend  $\mathbb{C} = \mathbb{I}$  pour simplifier.

Une formulation équivalente du problème (10) consiste à introduire la base de données de manière implicite à partir d'une matrice  $H := H(P)$ . Cette matrice encode le *clustering* et permet de calculer la variance au sein de chaque cluster. Pour un clustering fixé sur les déformations principales, le problème (10) se réécrit alors en utilisant la notation de Mandel (i.e. en forme matricielle) :

$$(\boldsymbol{\sigma}, P) = \arg \min \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\top (Q^\top H Q) \boldsymbol{\sigma} \quad \text{tel que } D\boldsymbol{\sigma} = F. \quad (11)$$

Il s'agit du même problème de minimisation que dans la formulation DDI [8], mais avec l'opérateur de rotation supplémentaire  $Q$ . L'algorithme associé conserve donc sa structure générale mais il faut prendre en compte la transformation de repère. Il repose sur une procédure de projections alternées, comme décrit dans [4], qui fournit également une preuve de convergence de l'algorithme.

### 3 Résultats et discussion

Dans cette section, nous appliquons la méthode DDI à des données synthétiques générées à partir d'une simulation par éléments finis. Le maillage 2D, associé à une approximation linéaire par morceaux, comporte 1340 nœuds et 2416 points de quadrature, comme illustré dans la figure 1. Le modèle est sollicité par une déformation de 10% dans la direction verticale. Nous supposons que le matériau est incompressible et soumis à un état de contraintes planes. Le modèle élastique non linéaire isotrope s'écrit sous la forme

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = -p\mathbf{I} + 2G(1 + \alpha \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad (12)$$

où  $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$  désigne la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $G$  est le module de cisaillement,  $\alpha$  un paramètre de non-linéarité, et  $p$  la pression déterminée par la condition de contraintes planes. Le paramètre de non-linéarité est fixé à  $\alpha = 3$ , et les poids  $w_e$  sont choisis égaux aux poids de quadrature du maillage.

La figure 2 présente les résultats obtenus par la méthode avec  $N_{\mathcal{D}} = 300$  clusters pour les deux variantes

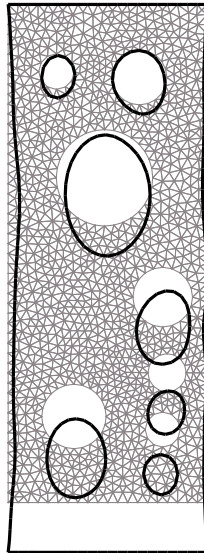


FIGURE 1 – Maillage par éléments finis utilisé pour générer les données synthétiques. La ligne noire indique le contour de la déformation.

étudiées, la DDI classique et la DDI isotrope. Dans la figure 2a, la DDI reproduit la réponse de référence, avec un alignement globalement satisfaisant des valeurs simulées sur la courbe de référence. L'erreur relative, calculée par rapport à la solution de référence est d'environ 10%. La figure 2b montre que la version isotrope améliore encore cet accord. L'alignement des points pour I-DDI avec la courbe de référence est plus serré, et l'erreur relative est réduite à environ 2%.

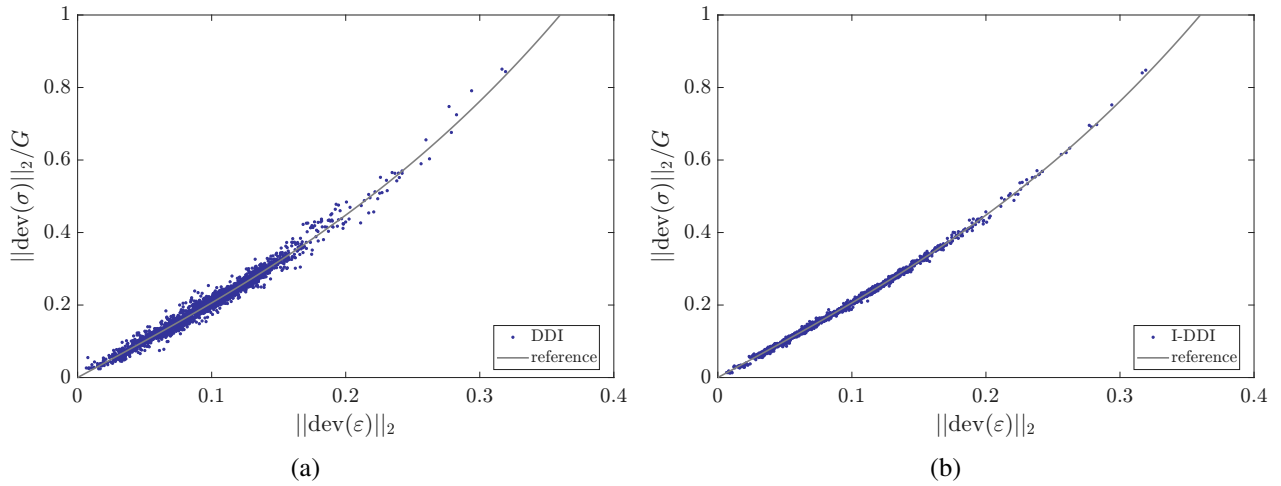


FIGURE 2 – Comparaison de la méthode pour  $N_D = 300$  : résultats obtenus avec (a) la DDI et (b) l’I-DDI sous l’hypothèse d’isotropie.

La figure 3 examine la coaxialité entre les tenseurs de déformation et de contrainte. Dans le cas d’un matériau isotrope, les tenseurs doivent partager les mêmes directions principales. Pour vérifier ce point, l’angle entre ces directions est évalué afin de quantifier leur alignement. Pour la DDI (figure 3a), environ 65% des points présentent un angle de désalignement compris entre  $0^\circ$  et  $2^\circ$ . Ce résultat confirme que la méthode identifie un comportement globalement cohérent avec l’isotropie du matériau simulé. La figure 3b montre que l’approche isotrope I-DDI renforce cette coaxialité, avec près de 95% des points se situant dans l’intervalle  $[0^\circ \ 2^\circ]$ . Cette concentration indique que la version isotrope améliore significativement l’alignement entre les directions principales des tenseurs de contrainte et de déformation, ce qui rapproche davantage le comportement identifié du comportement physique réel.

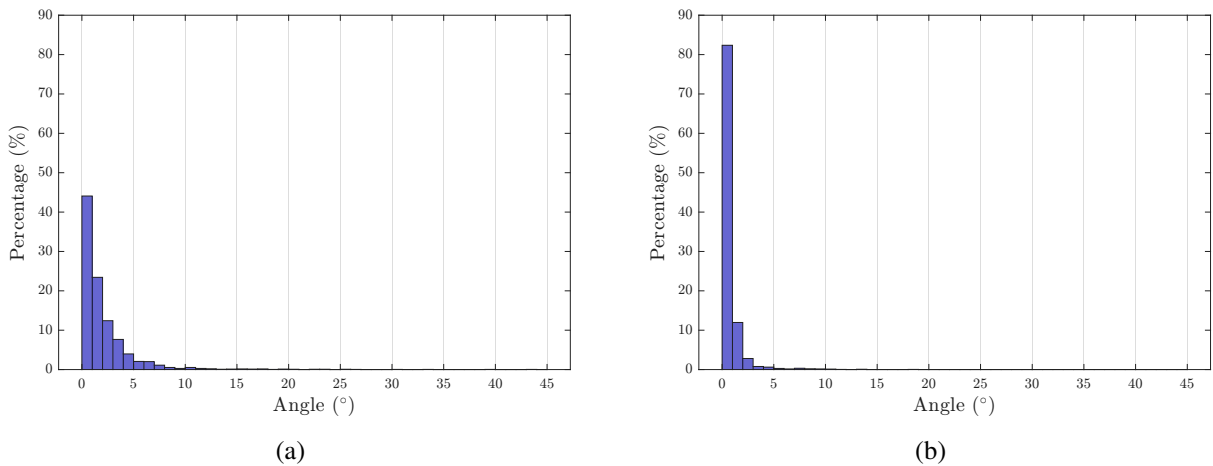


FIGURE 3 – Angle d’alignement entre les directions principales de  $\varepsilon$  et  $\sigma$  avec : (a)  $\sigma$  obtenue par la DDI et (b)  $\sigma$  obtenue par l’I-DDI.

La figure 4 montre que l’erreur relative diminue lorsque la taille de la base de données  $N_D$  augmente, aussi bien pour la DDI que pour l’I-DDI. On constate également que, pour toutes les valeurs de  $N_D$  considérées, l’erreur relative de l’I-DDI reste strictement inférieure à celle obtenue avec la DDI. La distance utilisée par la I-DDI revient à réduire la dimension du tenseur déformation, puisqu’il est diagonalisé. En 2D, par exemple, seules deux composantes principales demeurent actives. Autrement dit, l’espace passe de trois composantes indépendantes à seulement deux. Cette réduction de dimension agit en faveur du *clustering*, qui opère désormais dans un espace plus compact et mieux structuré d’un point de vue physique.

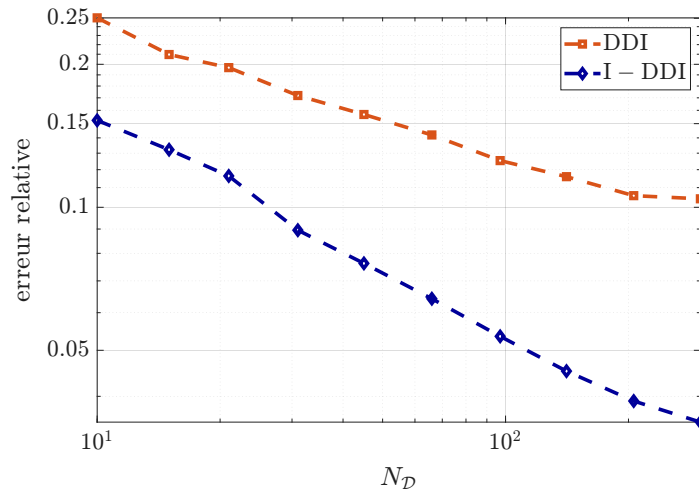


FIGURE 4 – Comparaison de l’erreur relative, calculée à partir de la solution éléments finis, entre la DDI et l’I-DDI pour dix valeurs de  $N_D$  compris entre 10 et 300 clusters.

## 4 Conclusion

Une adaptation de la méthode DDI au cas des comportements isotropes a été présentée, aboutissant à la formulation I-DDI. Dans ce cadre, la régularisation n’est plus réalisée dans l’espace  $(\varepsilon, \sigma)$  directement, mais dans un espace réduit fondé sur les déformations et contraintes principales. Cette formulation exploite explicitement l’invariance du comportement isotrope par rotation, ce qui permet de construire un *clustering* tenant compte de la structure physique du problème, et non plus uniquement de la géométrie. Les résultats obtenus sur des données synthétiques montrent que les contraintes identifiées par l’I-DDI se rapprochent significativement de la solution de référence, attestant de l’efficacité de cette variante spécialisée de la méthode.

L’analyse théorique développée pour la méthode DDI [8, 4] reste valable et peut être étendue à la version isotrope I-DDI, confirmant ainsi la robustesse de la procédure.

Une perspective importante de ce travail consiste à appliquer la méthode I-DDI à des données expérimentales réelle, afin d’évaluer ses performances et sa robustesse dans des situations appliquées.

## Remerciements

Ces travaux ont bénéficié d’un financement de l’ISite NExT (Nantes Université) au travers du projet IRP iDDrEAM.

## Références

- [1] J. Bonet, R.D. Wood, *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge university press, 1997.
- [2] M. Dalémat, M. Coret, A. Leygue, E. Verron, *Measuring stress field without constitutive equation*. *Mechanics of Materials*, 136, 103087, 2019.
- [3] M. Gédiaç, F. Hild. *Full-field measurements and identification in solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [4] N. Hachem, A. Leygue, L. Stainier. *Mathematical and numerical assessment of Data-Driven Identification method applied to nonlinear elasticity*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 446, 118273, 2025.
- [5] T. Kirchdoerfer, M. Ortiz. *Data-driven computational mechanics*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 304, 81-101, 2016.
- [6] R. Langlois, M. Coret, J. Réthoré. *Non-parametric stress field estimation for history-dependent materials : Application to ductile material exhibiting Piobert–Lüders localization bands*. *Strain*, 58(4), e12410, 2022.
- [7] A. Leygue, M. Coret, J. Réthoré, L. Stainier, E. Verron. *Data-based derivation of material response*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331, 184-196, 2018.

- [8] A. Leygue. *On the formulation and convergence of Data-Driven Identification*. Comptes Rendus. Mécanique 353.G1, 761-773, 2025.
- [9] RW. Ogden, *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, 1997.
- [10] G. Valdés-Alonzo. *Identification of material properties and phase distribution of heterogeneous materials through data-driven computational methods : Towards an enhanced constitutive space*. Thèse de Doctorat, École centrale de Nantes ; Universitat politècnica de Catalunya-BarcelonaTech, 2022.