

Méthode de flexibilité pour la mécanique du contact : approches par éléments finis et par éléments de frontière

Y. Boye¹, J. Bleyer², S. Chaillat³, V.A. Yastrebov¹

¹ Centre des Matériaux, Mines Paris – PSL, CNRS UMR 7633, Versailles, yahya.boy@minesparis.psl.eu, vladislav.yastrebov@minesparis.psl.eu

² Laboratoire Navier, ENPC, Institut Polytechnique de Paris, Champs-sur-Marne, jeremy.bleyer@enpc.fr

³ Laboratoire POEMS, CNRS-ENSTA-INRIA, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, stephanie.chaillat@ensta.fr

Résumé — Pour pallier des limitations des méthodes classiques en mécanique du contact, nous proposons la *méthode de flexibilité* améliorée, fondée sur la construction d'un opérateur linéaire S_c reliant les déplacements et les pressions de contact, reformulant le problème en *Linear Complementarity Problem* (LCP) résolu par des algorithmes dédiés. Nous explorons la construction la plus efficace de S_c par éléments finis et éléments de frontière; comme S_c est dense par construction, nous en calculons une approximation en matrices hiérarchiques (\mathcal{H} -matrices) réduisant ainsi temps de calcul et coûts mémoire. **Mots clés** — mécanique du contact, méthode de flexibilité, Linear Complementarity Problem (LCP), matrices hiérarchiques, éléments de frontière, éléments finis.

1 Contact unilatéral sans frottement : formulation et limites des approches classiques

Les premières solutions analytiques du contact mécanique remontent à Boussinesq [1], pour une force ponctuelle sur un demi-espace élastique, et à Hertz [2], pour le contact entre deux surfaces localement quadratiques. Ces modèles, bien que fondamentaux, reposent sur des hypothèses restrictives (géométries simples, linéarité, petites déformations). Le cadre général a été posé par Fichera [3] et Moreau, fondant la théorie moderne du contact unilatéral.

1.1 Formulation forte

Soit un corps élastique linéaire occupant $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) de frontière régulière $\Gamma = \Gamma_u \sqcup \Gamma_t \sqcup \Gamma_c$. L'équilibre s'écrit :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_t.$$

Sur la surface potentielle de contact Γ_c , on décompose la traction en une partie normale et une partie tangentielle $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_t$. En notant $g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + g_0$ le *gap*, les conditions de Signorini–Moreau, qui assurent qu'aucune inter-pénétration ni adhésion ni cisaillement ne se produisent sur Γ_c , s'écrivent :

$$g(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad g(\mathbf{u})\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{u}) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0}. \quad (1)$$

1.2 Formulation faible et inéquation variationnelle

On définit

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u\}, \quad \mathbb{V}_0 = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\},$$

et l'ensemble convexe admissible

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid g(\mathbf{v}) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

Pour tout déplacement admissible $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{K}$, on a $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in \mathbb{V}_0$. En multipliant l'équilibre par ce déplacement virtuel $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ et en intégrant sur Ω , on obtient une *inéquation* variationnelle :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Omega \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}), d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}. \quad (2)$$

Cette inéquation variationnelle satisfait les conditions du *théorème de Stampacchia* ([4], [5]), qui garantit l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution $\mathbf{u} \in \mathbb{K}$. Le problème de contact unilatéral est donc bien posé au sens d'Hadarnard.

1.3 Approches classiques et leurs limites

Les méthodes numériques classiques du contact unilatéral incluent la pénalisation, les multiplicateurs de Lagrange, le Lagrangien augmenté et les approches FFT-BEM. La pénalisation [6] remplace l'inégalité $\{g(\mathbf{u}) \geq 0, \sigma_n \leq 0, \sigma_n g = 0\}$ par une loi régularisée $\sigma_n(\mathbf{u}) = -\varepsilon \langle g(\mathbf{u}) \rangle_-$, simple et peu intrusive, mais dont la performance dépend fortement du paramètre de pénalité à ajuster : une valeur trop faible induit une interpénétration non physique, tandis qu'une valeur trop élevée dégrade sévèrement le conditionnement du problème. Les multiplicateurs de Lagrange [7], [8] imposent la non-pénétration de façon exacte, mais au prix d'une forte intrusivité : introduction d'inconnues supplémentaires, système point-selle et choix d'espaces discrets satisfaisant une condition inf-sup, ce qui complique l'intégration dans des codes éléments finis industriels. Le Lagrangien augmenté [9] atténue certaines difficultés de convergence, mais conserve les inconnues duales et introduit des paramètres supplémentaires ainsi qu'un surcoût algorithmique. Enfin, les méthodes FFT-BEM offrent une excellente efficacité pour le demi-espace homogène grâce à une formulation convolutionnelle accélérée en $O(N \log N)$, mais restent limitées aux géométries planes/périodiques et à des hypothèses matérielles restrictives.

Ces limites, en particulier le *réglage délicat* de la pénalisation et l'*intrusivité* des multiplicateurs, motivent le recours à une approche plus modulaire fondée sur un opérateur de flexibilité S_c .

2 Méthode de flexibilité non intrusive

2.1 Principe général

Inspirée de l'idée introduite par Zienkiewicz et Francavilla [10], la *méthode de flexibilité* repose sur la construction d'un opérateur reliant les déplacements de contact aux efforts normaux sur Γ_c . Cet opérateur correspond à la *restriction de l'opérateur de Neumann-to-Dirichlet* (ou opérateur de Steklov-Poincaré) à la zone de contact potentiel.

En petites déformations et pour un matériau linéaire, la relation entre la trace normale du vecteur de déplacements \mathbf{u} et le vecteur de traction normale \mathbf{t}_c sur la zone de contact potentielle s'écrit :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_c} = S_c \mathbf{t}_c,$$

où S_c est la matrice de *flexibilité* de contact. Le champ de *gap* résultant est alors :

$$\mathbf{g} = S_c \mathbf{t}_c + \mathbf{g}_0,$$

et les conditions de Signorini-Moreau deviennent un *problème de complémentarité linéaire (LCP)* :

$$\mathbf{g} = S_c \mathbf{t}_c + \mathbf{g}_0, \quad \mathbf{g} \geq 0, \quad \mathbf{t}_c \geq 0, \quad \mathbf{g}^\top \mathbf{t}_c = 0.$$

Ce système peut être résolu par des algorithmes spécialisés tels que le *gradient conjugué contraint (CCG)*, l'algorithme de *Lemke* ou le *PSOR* [11]. Les efforts de contact obtenus de cette manière sont intégrés dans le problème variationnel en tant que conditions de Neumann, désormais formulées pour $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_0. \quad (3)$$

Cette méthode présente l'avantage d'être non intrusive : la matrice S_c peut être extraite d'un modèle éléments finis ou éléments de frontière. Son principal inconvénient réside dans le *caractère plein* de S_c : pour N_c degrés de liberté sur la surface de contact potentielle, le stockage et les calculs sont en $O(N_c^2)$. Pour surmonter cette complexité algorithmique, nous exploitons la structure à faible rang des interactions lointaines et adoptons une *compression hiérarchique* (\mathcal{H} -matrices) réduisant les coûts à $O(N_c \log N_c)$.

Le schéma de la figure 1 illustre les étapes principales : (1) construction de S_c à partir du modèle mécanique, (2) compression hiérarchique, (3) résolution du LCP, et (4) résolution du problème mécanique avec des efforts de contact trouvés.

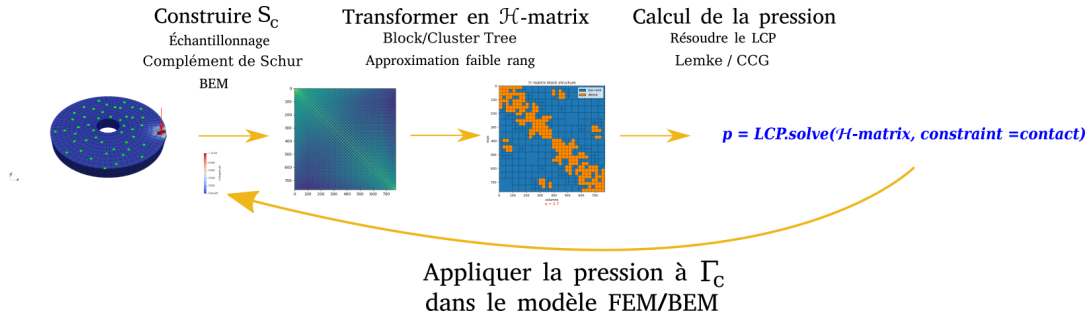


FIGURE 1 – Principe méthode de flexibilité

Cette approche est mise en œuvre dans un code de recherche en cours de développement, dont l'interface utilisateur est implémentée en Python et le cœur de calcul en C++ qui sera distribué sous une licence libre.

2.2 Construction de l'opérateur S_c

L'élément central de la méthode de flexibilité est la matrice S_c , reliant les déplacements de contact aux pressions normales appliquées sur Γ_c . Elle peut être construite (entre autres) de trois manières selon le modèle sous-jacent : par *complément de Schur* de l'opérateur des éléments finis K , par *échantillonnage direct* à l'aide d'un solveur éléments finis, ou via la *méthode des éléments de frontière (BEM)*, les trois voies sont explorées dans ce projets.

2.2.1 Complément de Schur (FEM)

Dans le cadre éléments finis, la matrice de raideur K est partitionnée entre degrés de liberté intérieurs $\{i\}$ et ceux de la surface de contact $\{c\}$:

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_c \end{pmatrix}.$$

L'élimination de u_i conduit à la relation condensée :

$$u_c = S'_c f_c, \quad S'_c = (K_{cc} - K_{ci} K_{ii}^{-1} K_{ic})^{-1}.$$

S'_c correspond ainsi à la *compliance condensée* sur la zone de contact, intégrant l'influence du domaine intérieur via K_{ii}^{-1} . En pratique, on profite du caractère SPD de K et on calcule les inverses avec des décompositions de Cholesky. Le passage de S'_c à l'opérateur S_c introduit précédemment se fait alors en utilisant la matrice de couplage appropriée entre les tractions t_c et les forces f_c sur Γ_c .

2.2.2 Échantillonnage direct (FEM)

Une méthode plus simple consiste à appliquer successivement une force unitaire sur chaque degré de liberté du contact et à mesurer la réponse :

$$S'_c = [u^{(1)} \quad u^{(2)} \quad \dots \quad u^{(N_c)}],$$

où $u^{(i)}$ est un vecteur-colonne représentant les déplacements des noeuds de la surface de contact potentielle dûs à une charge unitaire $f^{(i)}$ appliquée au noeud i . Chaque colonne de S'_c s'obtient en résolvant $Ku = f$, mais K n'est factorisée qu'une seule fois, lors de la première itération.

2.2.3 Formulation intégrale de frontière (BEM)

La BEM est basée sur une reformulation du problème en une équation intégrale de frontière. Pour les problèmes élastostatiques, l'identité de Somigliana [12] relie les traces des déplacements et des tractions :

$$c(x)u_i(x) + \int_{\Gamma} H_{ij}(x, y)u_j(y)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} G_{ij}(x, y)t_j(y)d\Gamma(y),$$

où G_{ij} et H_{ij} sont les solutions fondamentales de Kelvin (singulières) associées aux déplacements et aux tractions, respectivement. Après discrétisation, la forme matricielle est :

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}.$$

On partitionne les vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{t} suivant la frontière associée $\Gamma = \Gamma_u \sqcup \Gamma_t \sqcup \Gamma_c$ (Dirichlet, Neumann, contact) et les matrices correspondantes :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{uu} & H_{ut} & H_{uc} \\ H_{tu} & H_{tt} & H_{tc} \\ H_{cu} & H_{ct} & H_{cc} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{uu} & G_{ut} & G_{uc} \\ G_{tu} & G_{tt} & G_{tc} \\ G_{cu} & G_{ct} & G_{cc} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_u \\ u_t \\ u_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_u \\ t_t \\ t_c \end{pmatrix}.$$

Pour construire l'opérateur de flexibilité sur la zone de contact, on se place dans le cadre standard de la méthode de flexibilité : u_u est prescrit sur Γ_u , t_t est prescrit sur Γ_t , et l'on cherche la relation linéaire entre t_c et u_c . En particulier, pour définir \mathbf{S}_c comme opérateur de Neumann–Dirichlet restreint à Γ_c , on considère les données homogènes $u_u = 0$ et $t_t = 0$, et une traction imposée t_c . Le système discret s'écrit alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} H_{ut} & H_{uc} & -G_{uu} \\ H_{tt} & H_{tc} & -G_{tu} \\ H_{ct} & H_{cc} & -G_{cu} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} u_t \\ u_c \\ t_u \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} G_{uc} \\ G_{tc} \\ G_{cc} \end{pmatrix}}_B t_c,$$

d'où

$$u_c = \mathbf{S}_c t_c, \quad \mathbf{S}_c = \Pi_c A^{-1} B \Pi_c^\top,$$

où Π_c désigne l'opérateur d'extraction du sous-vecteur associé aux degrés de liberté de Γ_c . Cette construction fournit directement \mathbf{S}_c à partir des matrices BEM globales \mathbf{H} et \mathbf{G} .

Cette formulation présente un avantage de taille : elle réduit la dimension du problème (3D \rightarrow 2D). Mais, nécessite tout de même un soin particulier pour évaluer numériquement de façon précise les intégrales singulières de l'indentité de Somigliana.

2.3 Accélération et compression par matrices hiérarchiques

L'opérateur de flexibilité \mathbf{S}_c est dense : chaque nœud interagit avec tous les autres. Pour $N_c = 10^5$, il requiert plus de 80 Go de mémoire et plusieurs heures pour un seul produit matrice–vecteur. Les interactions entre régions éloignées étant faiblement corrélées, elles peuvent être approximées par des blocs de faible rang.

Le principe des \mathcal{H} -matrices ([13], [14]) consiste d'abord à regrouper récursivement les degrés de liberté en *clusters*, par exemple à l'aide d'un découpage géométrique de type PCA [15], jusqu'à une taille minimale n_{leaf} . Cette étape définit un *cluster tree*. On construit ensuite un *block cluster tree*, correspondant au produit cartésien de l'arbre par lui-même, afin d'organiser la matrice en blocs hiérarchiques. Une condition d'admissibilité permet d'identifier a priori les blocs susceptibles d'être de faible rang : deux clusters t et s forment un *bloc admissible* (i.e faible rang) si :

$$\max(\text{diam}(t), \text{diam}(s)) \leq \eta \text{dist}(t, s), \quad \eta > 0,$$

où $\text{diam}(\cdot)$ désigne le diamètre géométrique d'un cluster (par exemple celui de sa boîte englobante) et $\text{dist}(t, s)$ la distance minimale entre les boîtes englobantes associées. Les blocs *proches* sont stockés sous forme dense, tandis que les blocs admissibles sont approximés par une factorisation de faible rang :

$$A_{ts} \approx U_{ts} V_{ts}^\top, \quad U_{ts} \in \mathbb{R}^{|t| \times k}, \quad V_{ts} \in \mathbb{R}^{|s| \times k}, \quad k \ll \min(|t|, |s|).$$

Cette structure hiérarchique ramène le stockage et le coût d'un produit matrice–vecteur à une complexité quasi-linéaire, typiquement de l'ordre de $O(N_c k \log N_c)$.

Pour construire ces approximations, on utilise l'*Approximation Croisée Adaptative (ACA) avec pivotage partiel*, qui sélectionne itérativement un pivot à partir d'une ligne (ou colonne) courante, sans nécessiter l'accès à l'intégralité du bloc A_{ts} . Cette stratégie préserve l'intérêt de l'ACA en évitant l'assemblage complet de la matrice.

Algorithm 1 ACA avec pivotage partiel d'un bloc A_{ts}

```
1: Choisir  $i_1 \in t$ ,  $R \leftarrow A_{ts}$ 
2: for  $k = 1, 2, \dots$  do
3:    $j_k \leftarrow \arg \max_{j \in s} |R_{i_k j}|$ 
4:    $\mathbf{u}_k \leftarrow R_{:,j_k}$ ,  $\mathbf{v}_k \leftarrow R_{i_k,:} / R_{i_k j_k}$ 
5:    $R \leftarrow R - \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^\top$ 
6:    $i_{k+1} \leftarrow \arg \max_{i \in t} |(\mathbf{u}_k)_i|$ 
7:   if  $\|R\| / \|A_{ts}\| < \varepsilon_{ACA}$  then
8:     arrêter
9:   end if
10: end for
11: Retourner  $A_{ts} \approx UV^\top$ 
```

En pratique, pour $N_c = 10^5$ et un rang moyen $k \approx 40$ pour une tolérance typique $\varepsilon_{ACA} \in [10^{-4}, 10^{-6}]$, le stockage passe de 80 Go à moins d'1 Go, et le produit $S_c \mathbf{x}$ s'effectue en quelques secondes. Les \mathcal{H} -matrices constituent ainsi le cœur de l'accélération de notre approche, rendant la méthode de flexibilité scalable pour des problèmes de contact de grande taille sans perte notable de précision.

3 Résultats numériques et analyse

3.1 Comparaison Schur et échantillonnage

Nous étudions ici la performance de la construction de la matrice de flexibilité S_c dans un cadre éléments finis sous FEniCSx, en comparant (i) la condensation par complément de Schur et (ii) l'échantillonnage direct. Le cas test correspond à un cube unitaire, avec une condition de Dirichlet imposée sur $z = 0$. La surface de contact potentielle Γ_c est la face supérieure $z = 1$. Dans la suite, le nombre de ddls reporté sur l'axe des abscisses désigne N_c , le nombre de degrés de liberté associés à Γ_c (pour la composante normale considérée); le nombre total de ddls volumique est plus élevé, mais n'intervient qu'indirectement via la résolution des systèmes EF.

En termes de précision, les opérateurs S_c obtenus par Schur et par échantillonnage coïncident à une tolérance numérique très stricte (écart relatif $< 10^{-15}$ en norme L^2 sur ce cas = précision machine). La figure 2 montre que les deux approches présentent un coût de construction en $O(N_c^2)$, attendu puisque chaque colonne de S_c requiert une résolution et que l'on en calcule N_c .

Nous distinguons deux variantes pour le complément de Schur : une version directe basée sur une factorisation (LU/Cholesky) et une version itérative (GMRES). Sur ce test, l'échantillonnage direct et le Schur avec solveur direct affichent des performances très proches, l'échantillonnage étant légèrement plus favorable aux plus grands N_c . À l'inverse, *le Schur itératif est plus coûteux* dans la gamme de tailles considérée, ce qui en fait une option moins compétitive ici. Ces résultats motivent l'utilisation prioritaire d'une stratégie directe (Schur ou échantillonnage) avant l'étape de compression hiérarchique.

3.2 Accélération pour les problèmes axisymétriques

Dans le cas particulier des géométries axisymétriques, la structure de symétrie peut être exploitée pour réduire drastiquement le coût de construction de la matrice de flexibilité S_c .

En effet, les points de contact situés à une même distance radiale r présentent une réponse mécanique identique à une rotation près. Ainsi, il suffit de calculer la réponse pour un segment radial représentatif et de reconstruire les autres colonnes de S_c par permutation circulaire. Cette approche ramène la complexité de la construction de S_c de $O(N_c^2)$ à une complexité quasi-linéaire $O(N_c)$.

L'application de cette méthode à un anneau cylindrique élastique (souvent rencontré dans les applications industrielles) montre ce gain de temps CPU, sans perte de précision. La figure 3(b) illustre ce gain en temps de calcul.

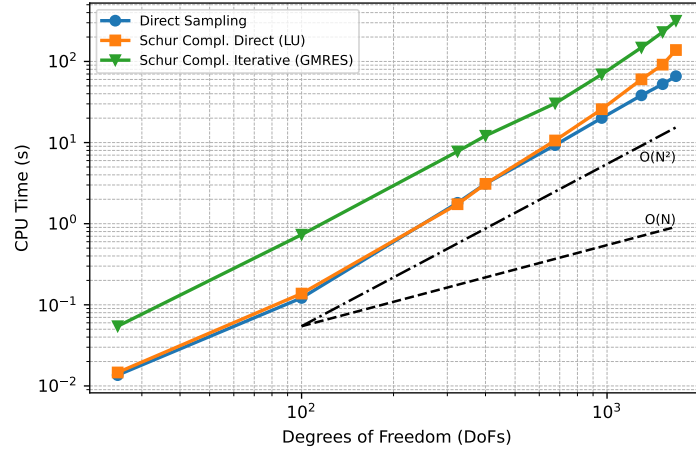


FIGURE 2 – Temps CPU de construction de S_c en fonction de N_c . Comparaison échantillonnage direct et complément de Schur (LU, GMRES).

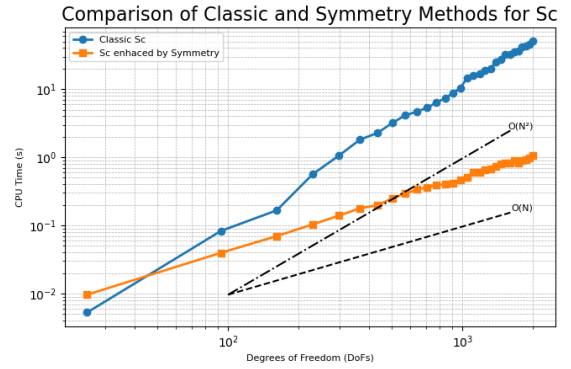
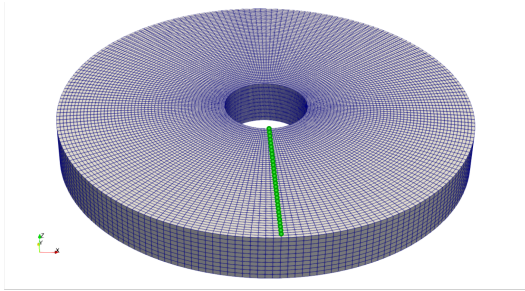


FIGURE 3 – (a) Zone de contact discrétisée. (b) Construction accélérée de S_c par symétrie pour un contact axisymétrique.

3.3 Validation numérique : problème de Hertz

Afin de valider la cohérence de la méthode, un test classique de la littérature a été reproduit : le problème de Hertz de contact entre un indenteur sphérique rigide et un demi-espace élastique isotrope.

Pour un indenteur de rayon $R = 100$ mm comprimant une surface élastique (cube $40 \times 40 \times 20$ mm) de module effectif $E^* = 1.09$ GPa d'une profondeur $\delta = 0.08$ mm, la théorie de Hertz prédit :

$$a = \sqrt{R\delta}, \quad p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad p_0 = \frac{2E^* a}{\pi R},$$

où a est le rayon de la zone de contact et $p(r)$ la pression de contact.

Formulé comme un problème auxiliaire, notre algorithme, appliqué avec la matrice S_c obtenue par échantillonnage dans FEniCSx, converge vers la pression analytique (cf. figure 5) : le profil de pression s'approche de la solution de Hertz à mesure que le maillage est raffiné. Cette convergence vers la solution analytique valide à la fois la précision de la matrice de flexibilité S_c , et la robustesse du solveur CCG. Ainsi, avec cette approche il est possible de résoudre des problèmes de contact tridimensionnels avec une précision équivalente aux formulations classiques, tout en conservant une structure modulaire et scalable.

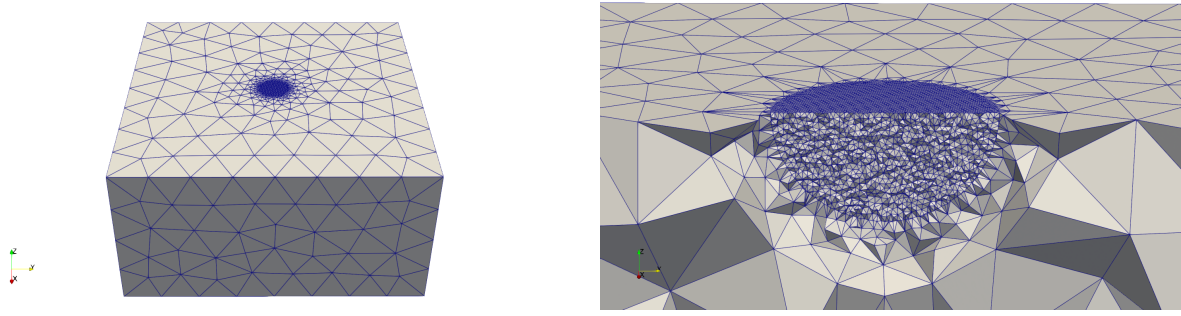


FIGURE 4 – (a) Maillage le plus fin (h_4) utilisé pour le calcul ; (b) coupe transversale de ce maillage.

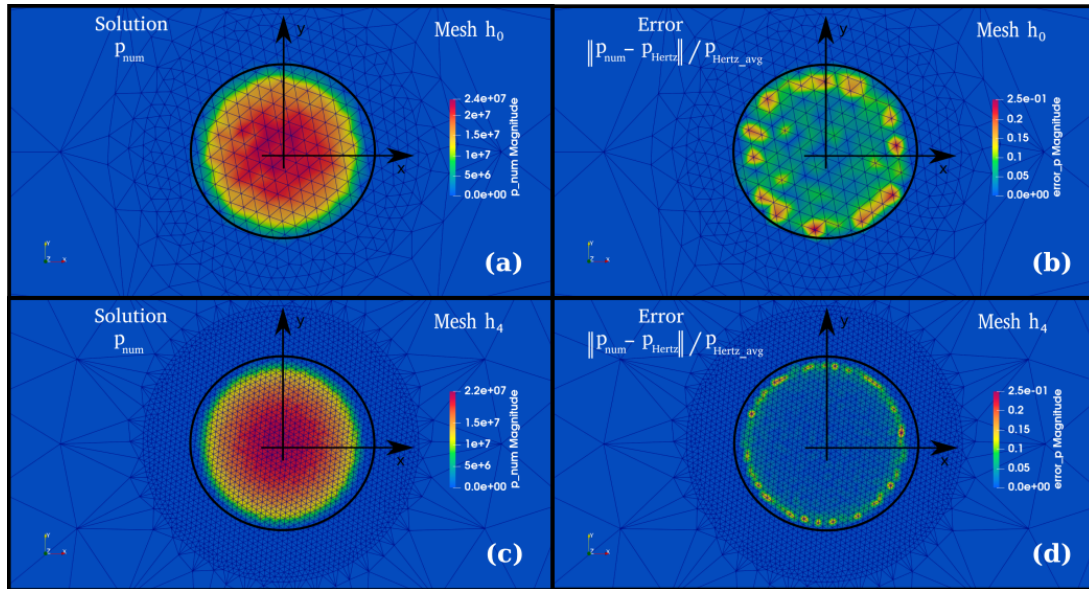


FIGURE 5 – (a,c) – champ de la pression de contact, (b,d) – champ de l'erreur L2 relative (normalisée par la pression moyenne de Hertz), les résultats sont présentés pour un maillage grossier h_0 (a,c) et le maillage le plus fin h_4 (c,d).

Conclusion

Nous avons développé une stratégie *non intrusive* pour le contact unilatéral de Signorini, basée sur la méthode de flexibilité et la résolution d'un LCP via l'opérateur de contact \mathcal{S}_c . Trois voies de construction de \mathcal{S}_c ont été étudiées : complément de Schur FEM, échantillonnage direct sous FEniCSx et une formulation BEM, actuellement en cours de finalisation. Combinée à la compression en \mathcal{H} -matrices, l'approche ouvre la voie à des simulations 3D à grande échelle tout en préservant l'architecture EF existante. À terme, nous visons l'extension au contact déformable-déformable, à l'introduction du frottement et à l'interfaçage avec des codes ouverts tels que FEniCSx, MFEM, MOFEM, A-set et Code_Aster.

Références

- [1] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [2] H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882) 156–171.
- [3] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* 36 (1964) 75–83.
- [4] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris* 258 (1964) 4413–4416.

- [5] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod (Paris) / Springer (Berlin), 1976.
- [6] N. Kikuchi, J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, 1988.
- [7] T. A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, 2002.
- [8] V. A. Yastrebov, *Numerical Methods in Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, 2013.
- [9] P. Alart, A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton-like solution methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 92 (1991) 353–375.
- [10] A. Francavilla, O. C. Zienkiewicz, A note on numerical computation of elastic contact problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 9 (1975) 913–924.
- [11] Cottle, R.W. and Pang, J.S. and Stone, R.E., *The Linear Complementarity Problem*, SIAM, 1992.
- [12] M. Bonnet, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, Wiley, 1999.
- [13] W. Hackbusch, *Hierarchical Matrices : Algorithms and Analysis*, Springer, 2015.
- [14] S. Chaillat, L. Desiderio, P. Ciarlet, Theory and Implementation of H-Matrix Based Iterative and Direct Solvers for Elastodynamics, *Journal of Computational Physics*, 2017.
- [15] I.T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, 1986.