

Un modèle à zone cohésive pour le comportement hydromécanique d'interfaces

G. Bacquaert¹

¹ EDF Lab Paris-Saclay, Palaiseau, goustan.bacquaert@edf.fr

Résumé — On propose un modèle à zone cohésive intégrant un couplage hydromécanique, afin de représenter le comportement non linéaire d'ouvrages hydrauliques au niveau d'interfaces. Pour cela, le modèle repose sur une formulation énergétique inspirée des milieux poreux dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés. Sa mise en œuvre s'appuie sur une formulation mixte par Lagrangien augmenté, ce qui permet de l'illustrer à travers deux simulations numériques réalisées avec le logiciel par éléments finis Code_Aster, développé à EDF.

Mots clés — Modèle à zone cohésive, Couplage hydromécanique, Lagrangien augmenté.

1 Introduction

La sécurité des barrages dépend fortement du comportement non linéaire des zones les plus vulnérables de l'ensemble barrage – fondation. Ces zones se situent généralement au niveau d'interfaces marquées par des discontinuités structurelles et géologiques, telles que le contact béton – rocher d'une fondation (Figure 1) ou encore au sein d'une faille géologique. Ces interfaces sont le siège de phénomènes complexes : frottement, glissement et ouverture. En particulier, ce dernier phénomène peut conduire à la propagation de sous-pressions par écoulement hydraulique en présence d'un fluide.



FIGURE 1 – Exemple d'interface béton – rocher.

Pour modéliser ces phénomènes hydromécaniques au sein d'une interface préalablement identifiée, le recours aux modèles à zones cohésives apparaît particulièrement attractif. Quelques applications à l'échelle d'ouvrages hydrauliques sont recensées dans la littérature actuelle. Néanmoins, la plupart de ces travaux semblent s'écarter d'une approche énergétique, soit en raison des hypothèses retenues sur l'évolution des discontinuités (par exemple, écoulement non associé), soit du fait du couplage hydromécanique supposé. L'originalité du travail ici proposé réside ainsi dans le respect strict d'une approche énergétique, en s'inspirant de la modélisation des milieux poreux dans le cadre des Matériaux Standard Généralisés [1] [2].

Le paragraphe 2 présente le modèle à zone cohésive développé pour représenter simplement les phénomènes susmentionnés au niveau d'une interface. Les équations constitutives ainsi que la mise en œuvre numérique du modèle, via une formulation mixte, y sont détaillées. Le paragraphe 3 illustre ensuite les propriétés du modèle à travers deux simulations numériques réalisées avec le code de calcul par éléments finis Code_Aster, développé par EDF [3].

2 Formulation du modèle à zone cohésive

On considère une interface Γ de normale \underline{n} . Pour tout vecteur \underline{x} , on note $x_n = \underline{x} \cdot \underline{n}$ sa composante normale et $\underline{x}_t = \underline{x} - x_n \underline{n}$ sa projection tangentielle. $\Delta x = x(t_{n+1}) - x(t_n)$ réfère à l'incrément d'une quantité x entre deux instants discrétisés successifs t_n et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

2.1 Équations de comportement

Le modèle de comportement cohésif s'appuie sur la définition d'une densité d'énergie $e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p)$ dans l'interface, étant une fonction de la discontinuité $\underline{\delta}$, de la pression hydraulique p , et de son gradient $\underline{\nabla}p$. L'expression de cette densité est choisie de sorte à respecter les propriétés suivantes au sein de l'interface :

- Contact avec frottement ;
- Ouverture avec glissement ;
- Rigidité tangentielle couplée à l'ouverture ;
- Couplage hydromécanique de type Terzaghi ;
- Écoulement de Darcy d'un fluide incompressible.

La densité d'énergie proposée est alors :

$$e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p) = \frac{1}{2} \frac{K_0}{1 + 2\beta K_0 \delta_n} \|\underline{\delta}_t\|^2 - p \Delta \delta_n + \sigma_t \Delta \delta_n + I_{\mathbb{R}^+}(\Delta \delta_n) - \frac{\lambda}{2} \|\underline{\nabla}p\|^2 \Delta t, \quad (1)$$

où K_0 représente une rigidité tangentielle, β un coefficient (homogène à une souplesse) de non-linéarité élastique, σ_t une résistance, λ une conductivité hydraulique, et où $I_{\mathbb{R}^+}$ désigne la fonction indicatrice définie par $I_{\mathbb{R}^+}(x) = +\infty$ si $x < 0$ et $I_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ sinon.

Soit \underline{T} le vecteur des forces cohésives. Celui-ci s'obtient comme sous-gradient de la densité d'énergie (1) vis-à-vis de la discontinuité, c'est-à-dire $\underline{T} \in \partial_{\underline{\delta}} e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p)$. Cette relation est alors équivalente aux suivantes :

$$\begin{cases} \underline{T}_t = \frac{K_0}{1 + 2\beta K_0 \delta_n} \underline{\delta}_t & (2) \\ f(\underline{T}, p) = T_n + p + \beta \|\underline{T}_t\|^2 - \sigma_t \leq 0, \quad \Delta \delta_n \geq 0, \quad \Delta \delta_n f(\underline{T}, p) = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (2) décrit l'élasticité tangentielle, tandis que (3) définit le domaine de réversibilité ainsi que la loi d'écoulement à partir du critère $f(\underline{T}, p)$. Le paramètre β intervient dans ces deux relations : il introduit une non-linéarité dans (2) via une rigidité tangentielle dépendante de l'ouverture, et il influence également la composante tangentielle du vecteur des forces cohésives dans le critère (3), comme illustré sur la Figure 2¹. On remarque également que le critère (3) s'exprime en fonction de la combinaison $\underline{T}' = \underline{T} + p \underline{n}$, qui correspond au vecteur des forces cohésives effectives au sens de Terzaghi, conformément aux propriétés recherchées pour le modèle.

1. Un couplage entre élasticité et plasticité similaire a été étudié dans [4], établissant ainsi un lien entre les domaines de réversibilité de Drucker–Prager et de Hoek–Brown.

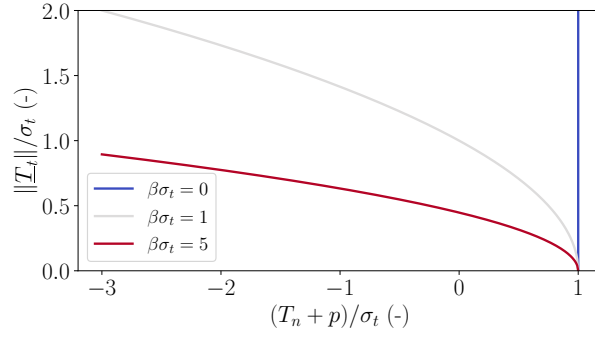


FIGURE 2 – Effet du paramètre β sur le domaine de réversibilité dans le plan $(T_n + p, \|T_t\|)$.

2.2 Formulation mixte par Lagrangien augmenté

Pour résoudre les équations de comportement inscrites dans la densité d'énergie $e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p)$ (1), une formulation mixte est proposée s'appuyant sur un Lagrangien augmenté, telle que présentée dans [5]. Cette formulation permet de traiter avec exactitude la condition d'adhérence normale avant ouverture de l'interface, en imposant la discontinuité $\underline{\delta}$ à être égale au saut de déplacement \underline{u} par le biais de multiplicateurs de Lagrange $\underline{\mu}$. Le Lagrangien augmenté $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\mu}, \underline{\delta}, p)$, défini sur le domaine Ω comprenant l'interface Γ , s'écrit alors

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\mu}, \underline{\delta}, p) = E_{\Omega \setminus \Gamma}(\underline{\underline{e}}(\underline{u})) + \int_{\Gamma} \left(e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p) + \underline{\mu} \cdot (\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}) + \frac{r}{2} \|\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}\|^2 \right) d\Gamma - \int_{\gamma_q} \bar{q} p \Delta t d\gamma, \quad (4)$$

où $E_{\Omega \setminus \Gamma}(\underline{\underline{e}}(\underline{u}))$ représente l'énergie en dehors de l'interface (supposée élastique), r désigne le coefficient d'augmentation du Lagrangien dans l'interface, et γ_q le bord de l'interface sur lequel un flux hydraulique \bar{q} peut être imposé (Figure 3).

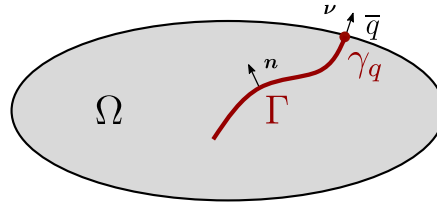


FIGURE 3 – Exemple d'interface Γ dans un domaine Ω .

Les conditions de stationnarité du Lagrangien augmenté (4) sur l'interface Γ , vis-à-vis des quatre champs $\underline{u}, \underline{\mu}, \underline{\delta}$ et p , sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} + \underline{\mu} + r(\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}) = \underline{0} & (\Gamma) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta} = \underline{0} & (\Gamma) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \underline{\mu} + r(\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}) \in \partial_{\underline{\delta}} e(\underline{\delta}, p, \underline{\nabla}p) & (\Gamma) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta \underline{\delta}_n + \underline{\nabla} \cdot (-\lambda \underline{\nabla} p) \Delta t = 0 & (\Gamma) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} (-\lambda \underline{\nabla} p) \cdot \underline{\nu} = \bar{q} & (\gamma_q) \end{cases} \quad (9)$$

L'équation (5) exprime l'équilibre le long de l'interface Γ , tandis que (6) impose la contrainte d'égalité entre le saut de déplacement $\llbracket \underline{u} \rrbracket$ et la discontinuité $\underline{\delta}$. L'équation (7) est celle précédemment présentée dans (2) et (3), où le vecteur des forces cohésives est alors apparenté à $\underline{\mu} + r(\llbracket \underline{u} \rrbracket - \underline{\delta}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$. Enfin, (8) représente l'équation de conservation du fluide dans l'interface, où le flux $-\lambda \underline{\nabla} p$ suit la loi de Darcy, et (9) traduit la condition aux limites appliquée à ce flux.

3 Illustrations

Ce paragraphe vise à mettre en évidence les caractéristiques du modèle à zone cohésive proposé à partir de deux exemples simples.

3.1 Mise en évidence du couplage ouverture – rigidité tangentielle

Ce premier exemple présente l'influence de l'ouverture sur la réponse successive au cisaillement de l'interface. Pour cela, le chargement représenté sur la Figure 4a est considéré : traction isotrope jusque $T_n = \sigma_t$ (a), décharge complète (b), cisaillement jusque $\|\vec{T}_t\| = \sqrt{\sigma_t/\beta}$ (c), et de nouveau une décharge complète (d).

L'évolution correspondante du glissement $\|\vec{\delta}_t\|$ est représentée sur la Figure 4b. En raison de l'ouverture provoquée par la mise en traction isotrope (a), la rigidité tangentielle est réduite lors du cisaillement (c). À plastification en cisaillement, l'ouverture évolue de nouveau, conduisant ainsi de nouveau à une rigidité tangentielle réduite lors de la dernière décharge (d). On notera en particulier l'absence de glissement résiduel lorsque la force cohésive tangentielle revient à zéro.

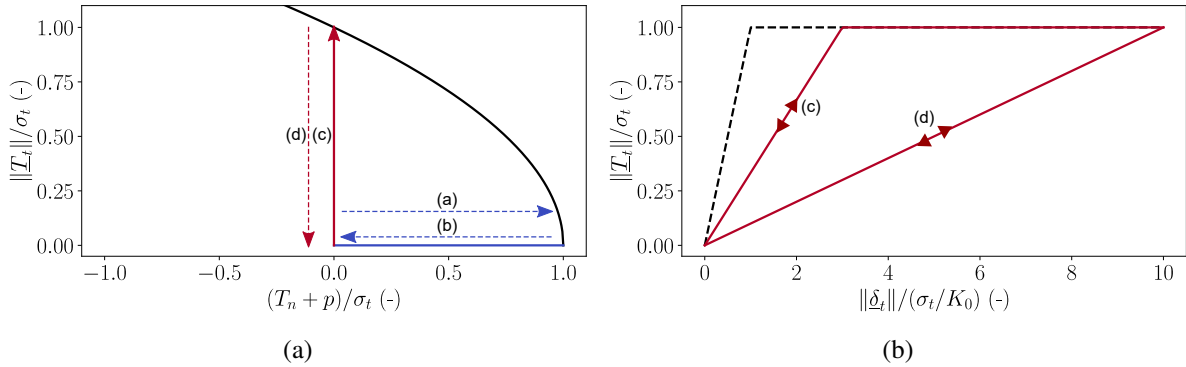


FIGURE 4 – Trajet de chargement et évolution correspondante du glissement. Le paramètre de non-linéarité est ici pris à $\beta = 1/\sigma_t$. Sur (b), la réponse en traits discontinus représente une charge en cisaillement démarrant à ouverture nulle.

3.2 Mise en évidence du couplage hydromécanique

Ce second exemple illustre le couplage hydromécanique inhérent au modèle. La configuration du problème est décrite sur la Figure 5. Aux deux extrémités de l'interface, une pression hydraulique p_0 est appliquée. Simultanément, une traction à vitesse constante \dot{U} est imposée sur le bord supérieur du matériau élastique.

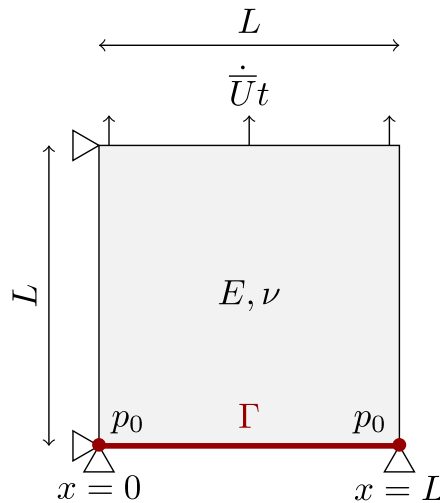


FIGURE 5 – Géométrie et conditions aux limites du problème.

Pour des instants t "suffisamment grands", on obtient aisément l'effort vertical moyen $\bar{\sigma}$ sur le bord

supérieur et le profil de pression hydraulique p comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\sigma}(t) = \sigma_t - p_0 + \frac{\dot{U}}{12\lambda} L^2 \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(x, t) = p_0 + \frac{\dot{U}}{2\lambda} x(x-L) \quad (11)$$

Pour une conductivité hydraulique λ forte, le profil de pression hydraulique reste ainsi quasiment constant, proche de p_0 tout le long de l'interface. Une valeur plus faible conduit à obtenir un profil parabolique plus marqué. En parallèle une valeur plus faible de λ augmente l'effort moyen $\bar{\sigma}$.

Ces tendances sont illustrées sur la Figure 6, pour plusieurs valeurs du paramètre adimensionnel $A = \dot{U}L^2/(p_0\lambda)$. On observe qu'une valeur plus élevée de A induit une réponse transitoire plus longue, caractérisée par un écrouissage non linéaire de l'effort moyen et une diminution de la pression hydraulique. Cette durée accrue est cohérente avec une conductivité hydraulique λ plus faible, pour laquelle l'établissement du régime d'écoulement stationnaire intervient plus tard.

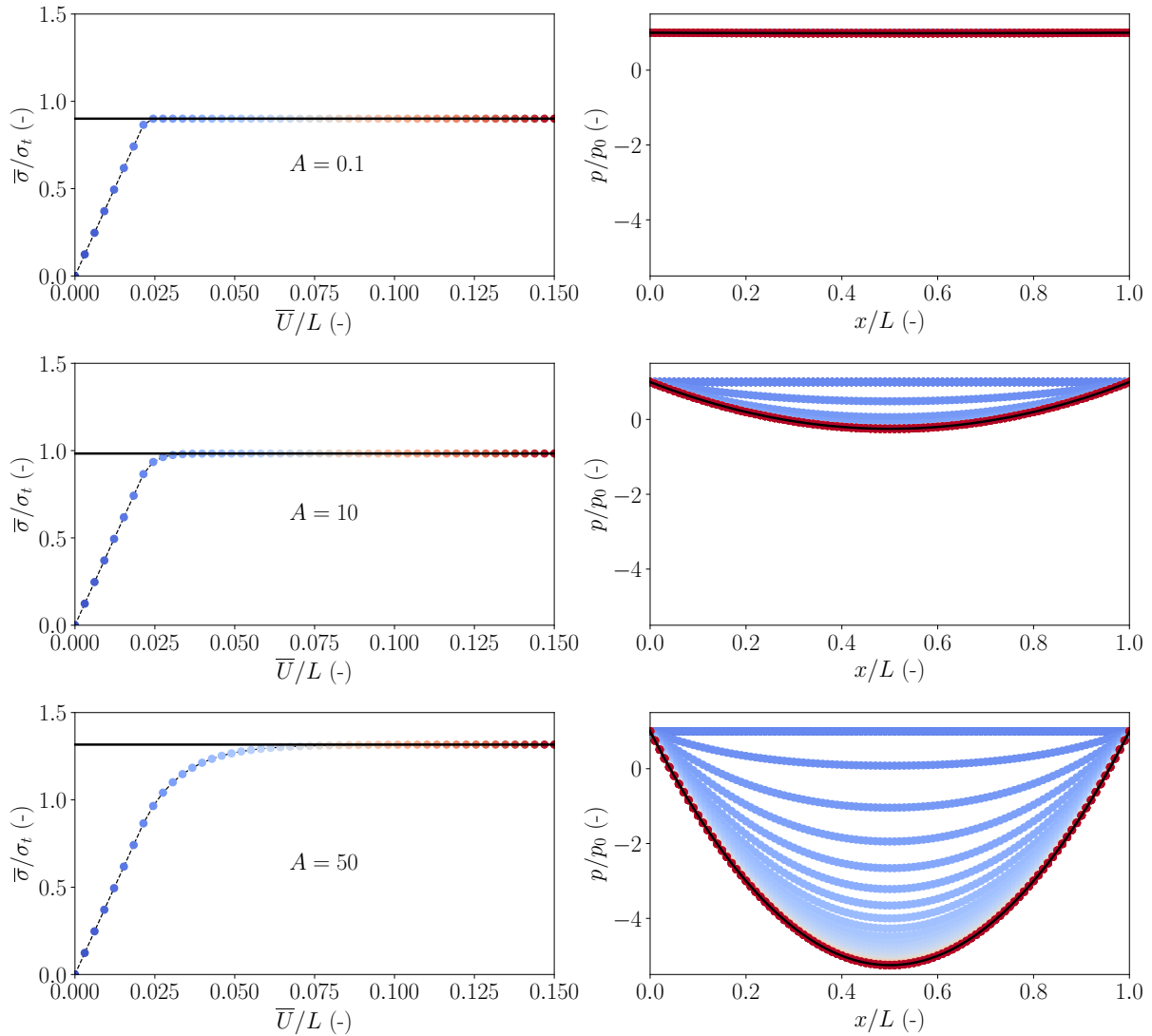


FIGURE 6 – Réponses de l'effort vertical moyen et du profil de pression hydraulique pour $A = \dot{U}L^2/(p_0\lambda) \in \{0.1, 10, 50\}$. Les lignes noires continues correspondent aux solutions (10) et (11).

4 Conclusion

Dans ce travail, on a proposé un modèle à zone cohésive destiné à représenter le comportement non linéaire des ouvrages hydrauliques localisé au niveau des interfaces. Ce modèle repose sur une formulation énergétique et intègre plusieurs phénomènes : un couplage entre élasticité et plasticité ; un domaine de réversibilité non linéaire, pour lequel les discontinuités sont pilotées par le vecteur des forces cohésives effectives de Terzaghi, ainsi qu'un écoulement hydraulique suivant la loi de Darcy. La mise en œuvre numérique du modèle dans le code par éléments finis Code_Aster s'appuie sur une formulation mixte par Lagrangien augmenté. Deux cas illustratifs ont permis de mettre en évidence les principales caractéristiques du modèle. En perspective, de futures simulations (2D et 3D) seront réalisées sur plusieurs barrages. Enfin, une sophistication du modèle pourra être envisagée, par exemple via l'ajout d'un écrouissage du domaine de réversibilité ou la prise en compte d'un écoulement hydraulique de type Poiseuille.

Références

- [1] B. Halphen, Q.-S. Nguyen. *Sur les matériaux standard généralisés*, Journal de Mécanique, 14 (1), 39-63, 1975.
- [2] O. Coussy. *Poromechanics*, Wiley, 2004.
- [3] EDF. *Finite element Code_Aster, Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies and Research*, 1989-2026.
- [4] I. Fontana, G. Bacquaert, D.A. Di Pietro, K. Kazymyrenko. *Hyperelastic nature of the Hoek–Brown criterion*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 115, 105782, 2026.
- [5] E. Lorentz. *A mixed interface finite element for cohesive zone models*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 (2), 302-317, 2008.