

# Comparaison et performances de solveurs EF pour les formulations Lip-Field et Phase-Field d'un problème d'endommagement 1D

Antoine Marlot<sup>1,2</sup>, Giuseppe Rastello<sup>2</sup>, Nicolas Moës<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, antoine.marlot@ens-paris-saclay.fr

<sup>2</sup> Université Paris-Saclay, CEA, Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques, Gif-sur-Yvette, giuseppe.rastello@cea.fr

<sup>3</sup> Université catholique de Louvain, Institute of Mechanics, Materials and Civil Engineering, Louvain-la-Neuve, nicolas.moes@uclouvain.be

**Résumé** — Cette étude propose une analyse comparative des formulations variationnelles Lip-field et Phase-field en s'intéressant à leurs propriétés de régularisation ainsi qu'à leur coût computationnel. Outre les stratégies de résolution classiquement mobilisées pour ce type de problèmes, une nouvelle discrétisation spatiale est développée pour chacune des deux formulations, accompagnée d'implémentations unidimensionnelles par éléments finis. Les performances obtenues sont évaluées à travers l'étude de la convergence du schéma de minimisation alternée et de la procédure d'optimisation utilisée pour l'estimation du champ d'endommagement.

**Mots clés** — Lip-field, Phase-field, endommagement, régularisation, approche variationnelle, évaluation des performances

## 1 Introduction

Cette étude examine et compare deux méthodes de régularisation de l'endommagement : les formulations Phase-field et Lip-field. Ces deux approches adoptent un cadre variationnel : la solution du problème mécanique est obtenue par minimisation d'un potentiel d'énergie incrémental, somme du potentiel d'énergie élastique et d'un potentiel de dissipation [1, 2].

Au cours des dernières décennies, l'approche variationnelle Phase-field pour la fracture [3, 4, 5] a été largement utilisée pour traiter le problème de la régularisation. Dans cette approche, la régularisation est obtenue en ajoutant une contribution non locale, dépendant du gradient d'endommagement, au potentiel de dissipation figurant dans l'énergie potentielle du système. Cette méthode présente l'avantage de garantir aisément les propriétés requises en termes d'écrouissage, d'adoucissement et de cohérence thermodynamique [6, 7]. Plus récemment, Moës et Chevaugeon [8] ont proposé une méthode alternative pour régulariser les modèles : la formulation Lip-field. Dans ce cas, le potentiel minimisé reste entièrement local, tandis que la régularisation est obtenue en imposant une contrainte de régularité de Lipschitz sur le champ d'endommagement.

En se concentrant sur les modèles d'endommagement imitant une fracture cohésive [9, 10, 11], cette étude compare les approches Lip-field et Phase-field en termes de propriétés de régularisation, de robustesse et de coût de calcul. Les deux méthodes sont implémentées numériquement à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFEM++ [12]. Après avoir comparé deux implémentations standards, des variantes alternatives des deux méthodes sont développées et leurs performances sont étudiées. En particulier, la convergence du processus de minimisation alternée ainsi que celle du problème d'optimisation associé au calcul du champ d'endommagement régularisé font l'objet d'une analyse détaillée. Enfin, des estimations d'erreur sont introduites et leur évolution lors du raffinement du maillage est étudiée.

Ces travaux font l'objet d'un article qui a été soumis pour publication dans une revue scientifique [13].

## 2 Phase-field et Lip-field formulations pour la fracture cohésive

### 2.1 Problème variationnel et potentiels énergétiques

Nous considérons un domaine unidimensionnel  $\Omega \in [0, L]$  soumis à un chargement en traction contrôlé par déplacement : les conditions aux limites de Dirichlet sont  $u(x=0) = 0$  et  $u(x=L) = U_d$ . Pour les modèles Phase-field et Lip-field, le problème mécanique est formulé comme le problème de minimisation d'énergie suivant :

$$(u, d) = \arg \min_{u^* \in \mathcal{U}(U_d), d^* \in \mathcal{D}_\bullet} \Pi_\bullet(u^*, d^*)$$

où  $u = u(x)$  et  $d = d(x)$  sont les champs scalaires de déplacement et d'endommagement et  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{D}_\bullet$  sont les espaces d'admissibilité correspondants. La fonctionnelle d'énergie totale  $\Pi_\bullet$  est la somme de l'énergie potentielle élastique et d'un potentiel de dissipation. La notation  $\bullet \in \{\text{PF}, \text{LF}\}$  est utilisée pour distinguer les formulations Phase-field (PF) et Lip-field (LF).

**Potentiels énergétiques totaux** Les fonctionnelles énergétiques PF et LF totales sont les suivantes :

$$\Pi_{\text{PF}}(u, d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g_{\text{PF}}(d) E \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{G_c}{\ell_{\text{PF}} c_{\text{PF}}} \int_{\Omega} \left[ h_{\text{PF}}(d) + \ell_{\text{PF}}^2 \left( \frac{dd}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (1)$$

$$\Pi_{\text{LF}}(u, d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g_{\text{LF}}(d) E \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{G_c}{\ell_{\text{LF}} c_{\text{LF}}} \int_{\Omega} h_{\text{LF}}(d) dx \quad (2)$$

Ici, l'énergie élastique est multipliée par une fonction de dégradation  $g_\bullet$ . L'énergie dissipée associée à l'évolution de l'endommagement est exprimée par une fonction de dissipation  $h_\bullet$ . De plus,  $E$  est le module d'Young du matériau,  $du/dx$  est la déformation,  $G_c$  est la ténacité du matériau, et  $\ell_\bullet > 0$  désigne la longueur caractéristique, qui contrôle la largeur de la zone d'endommagement régularisée et régit implicitement la taille de la zone de processus de fracture. Le paramètre sans dimension  $c_\bullet$  est une constante de normalisation qui dépend du choix de la fonction de dissipation  $h_\bullet(d)$  et garantit que l'énergie dissipée converge vers l'énergie de fracture  $G_c$  dans la limite où  $\ell_\bullet$  tend vers zéro.

**Espaces admissibles** Dans l'approche PF, la régularisation est effectuée explicitement en enrichissant l'énergie d'un terme gradient,  $(dd/dx)^2$ . Le champ d'endommagement est ainsi recherché dans un espace fonctionnel qui impose l'admissibilité et l'irréversibilité :

$$\mathcal{D}_{\text{PF}} = \left\{ d \in H^1(\Omega) \mid \underline{d} \leq d \leq 1, \frac{dd}{dx} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$$

où  $\underline{d}$  est le champ d'endommagement calculé précédemment. En revanche, l'approche LF préserve un potentiel de dissipation local en limitant directement les champs d'endommagement admissibles à ceux dont les gradients sont bornés, garantissant ainsi une continuité de Lipschitz de la variable d'endommagement :

$$\mathcal{D}_{\text{LF}} = \left\{ d \in L^\infty(\Omega) \mid \underline{d} \leq d \leq 1, \left| \frac{dd}{dx} \right| \leq \frac{1}{\ell_{\text{LF}}} \right\}$$

Pour les deux méthodes, le champ de déplacement cinématiquement admissible appartient à l'espace :

$$\mathcal{U}(U_d) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u = U_d \text{ on } \partial\Omega_u \}$$

où  $U_d$  est le déplacement prescrit sur la frontière de Dirichlet  $\partial\Omega_u$ .

Cette formulation variationnelle reflète la compétition entre le stockage d'énergie élastique et la dissipation d'énergie de fissuration, la stratégie de régularisation étant encodée soit dans la forme fonctionnelle du potentiel énergétique  $\Pi_{\text{PF}}$  (pour le modèle PF), soit dans l'espace d'admissibilité du champ d'endommagement  $\mathcal{D}_{\text{LF}}$  (pour le modèle LF).

### 2.2 Modèles d'endommagement

Deux modèles de type cohésif sont pris en considération. Ceux-ci sont conçus pour imiter un modèle de zone cohésive linéaire avec un comportement adoucissant linéaire dans le régime post-pic.

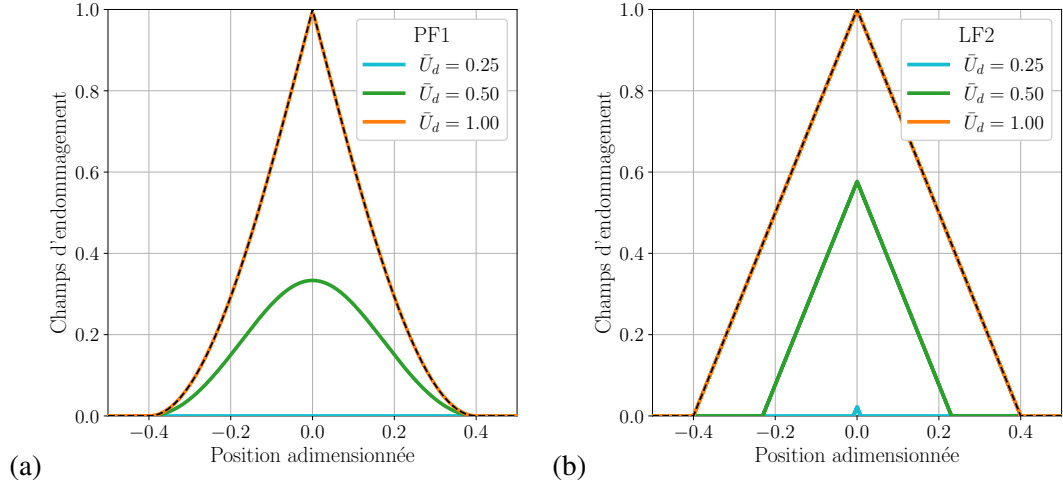


FIGURE 1 – Évolution de la bande endommagée pendant le chargement. Les résultats théoriques sont représentés par des lignes pointillées.

**Modèle Phase-Field de Wu [10]** Pour le modèle PF, les fonctions de dégradation et de dissipation sont définies comme suit :

$$g_{\text{PF}}(d) = \frac{(1-d)^2}{(1-d)^2 + \frac{2h_{\text{PF}}(d)}{\eta_{\text{PF}} c_{\text{PF}}}} \quad h_{\text{PF}}(d) = 2d - d^2 \quad c_{\text{PF}} = 4 \int_0^1 \sqrt{h(\omega)} d\omega = \pi$$

Ici,  $\eta_{\bullet}$  est un paramètre sans dimension qui régit l'amplitude de la contrainte maximale  $\sigma_t$ . Il est défini comme  $\eta_{\bullet} = \ell_{\bullet}/l_{\text{ch}}$ , où  $l_{\text{ch}} = E G_c/\sigma_t^2$ .

**Modèle Lip-field de Moës et al. [11]** Dans le cas du modèle LF, on choisit :

$$g_{\text{LF}}(d) = \frac{(1-d^2)^2}{(1-d^2)^2 + \frac{2h_{\text{LF}}(d)}{\eta_{\text{LF}} c_{\text{LF}}}} \quad h_{\text{LF}}(d) = d \quad c_{\text{LF}} = 2 \int_0^1 h(\omega) d\omega = 1$$

**Équivalence entre les formulations PF et LF** Les deux modèles d'endommagement sont insensibles à l'échelle de longueur, en ce sens que la réponse force-déplacement globale, ainsi que l'évolution des énergies totale, dissipée et élastique pendant le chargement, sont indépendantes de  $\ell_{\bullet}$ . En pratique, nous définissons les mêmes paramètres  $E, \sigma_t, G_c$  pour les deux modèles et obtenons la même *réponse mécanique (équivalence point-by-point)* et la même *dissipation d'énergie à la rupture*. La longueur caractéristique peut alors être sélectionnée pour contrôler la largeur de la bande d'endommagement. L'efficacité des solveurs dépend du nombre d'éléments dans la bande d'endommagement. L'objectif étant de permettre une comparaison directe entre les deux formulations en termes de performances numériques, les paramètres des modèles d'endommagement sont choisis de manière à garantir la *même largeur de bande*. À cette fin, nous définissons  $\ell_{\text{LF}} = \ell_c, \ell_{\text{PF}} = (2/\pi) \ell_c$ . Ainsi, nous obtenons  $\eta_{\text{LF}} = \eta_{\text{PF}}/(2/\pi) = \ell_c/l_{\text{ch}}$ .

### 2.3 Évolution du profil d'endommagement

La figure 1 met en évidence l'une des principales différences entre les deux approches. Avec la formulation PF, la largeur de bande reste constante tout au long du processus d'endommagement. Au contraire, pour la formulation LF, la longueur interne  $\ell_c$  ne contrôle la largeur de bande qu'à la rupture. Dans ce cas, c'est le gradient d'endommagement qui est imposé durant la simulation, et non la taille de la bande d'endommagement. D'un point de vue numérique, cela signifie que pour les solveur PF, le nombre d'éléments endommagés reste constant pendant la simulation, tandis que pour les solveur LF, ce nombre augmente linéairement avec la valeur maximale de l'endommagement  $d_w$ . Cela affecte donc les performances des solveurs.

### 3 Solveurs éléments finis pour les formulations PF et LF

Les formulations précédentes sont mises en œuvre dans un code développé en interne basé sur l'utilisation du code éléments finis `FreeFEM++` (ver. 4.15) [12].

#### 3.1 Solveur par minimisation alternée

La résolution des modèles PF et LF repose sur la minimisation des potentiels (1) et (2). En général, un algorithme de minimisation itérative alternée est utilisé [3, 8]. Pour traiter les contraintes d'admissibilité et d'irréversibilité appliquées au champ d'endommagement, l'utilisation de routines d'optimisation (*black-box*) s'avère avantageuse. Elles bénéficient d'implémentations robustes et potentiellement parallèles disponibles dans de nombreux environnements d'éléments finis modernes. Dans notre implémentation, nous résolvons le problème d'endommagement – problème d'optimisation sous contrainte – à l'aide d'une méthode de point intérieur primal-dual via la bibliothèque `IPOPT` [14].

#### 3.2 Problèmes discrétisés – approche standard et approche alternative

Les solveurs d'éléments finis PF et LF standards s'appuient sur deux discrétisations spatiales distinctes. La différence principale concerne le traitement du problème d'endommagement : dans les solveurs PF, la variable d'endommagement est généralement calculée sur le même maillage que le champ de déplacement, tandis que dans les solveurs LF, elle est calculée sur un maillage auxiliaire.

#### 3.3 Discrétisations standard

**Phase-field solver utilisant 1 maillage (PF1)** Les champs de déplacement  $u_h$  et d'endommagement  $d_h$  sont tous deux approximés à l'aide de fonctions linéaires continues par morceaux  $\mathbb{P}_1$ . Les degrés de liberté (DDLs) sont donc les valeurs nodales. D'autre part, les champs de déformation  $\varepsilon_h$  et de contrainte  $\sigma_h$  sont supposés être constants par morceaux sur chaque élément, c'est-à-dire qu'ils sont approximés dans un espace  $\mathbb{P}_0$ . Selon cette approche, les deux problèmes d'optimisation pour le calcul de  $u$  et  $d$  sont résolus sur un maillage unique  $\mathcal{T}_h$ .

**Lip-field solver utilisant 2 maillages (LF2)** L'énergie est minimisée par rapport au déplacement (problème d'équilibre) sur  $\mathcal{T}_h$ , comme dans le cas précédent, avec le champ de déplacement  $u_h \in \mathbb{P}_1$ . En revanche, le problème de minimisation pour le calcul du champ d'endommagement est résolu sur un maillage auxiliaire  $\mathcal{T}_h^*$ , dont les noeuds correspondent aux barycentres des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Nous définissons un champ d'endommagement auxiliaire  $\omega_h$  et un champ de déformation auxiliaire  $e_h$  comme des fonctions linéaires par morceaux  $\mathbb{P}_1$  sur  $\mathcal{T}_h^*$ . Le champ d'endommagement  $\omega_h^{k+1}$  est obtenu en résolvant le problème de minimisation sur  $\mathcal{T}_h^*$ . Une fois la minimisation terminée sur le maillage auxiliaire, le champ résultant  $\omega_h^{k+1}$  est projeté sur  $\mathcal{T}_h$  afin de définir le champ d'endommagement utilisé dans le problème d'équilibre. Aussi, après avoir résolu le problème d'équilibre, le champ de déformation doit transféré de  $\mathcal{T}_h$  à  $\mathcal{T}_h^*$ .<sup>1</sup>

#### 3.4 Discrétisations alternatives

Afin de permettre une comparaison plus cohérente entre les solveurs PF et LF, nous avons également pris en compte deux autres stratégies de discrétisation qui, à la connaissance des auteurs, n'ont pas encore été mentionnées dans la littérature.

**Phase-field solver utilisant 2 maillages (PF2)** Cette approche utilise la stratégie à deux maillages développée pour le solveur LF2.

---

1. Dans la présente implémentation, le champ d'endommagement  $d_h$  est supposé être constant par morceaux  $\mathbb{P}_0$  sur chaque élément de  $\mathcal{T}_h$ . Par conséquent, la projection des champs entre les maillages se réduit à une affectation directe entre les vecteurs correspondants. Cette correspondance rend le coût numérique du transfert de données entre les maillages négligeable.

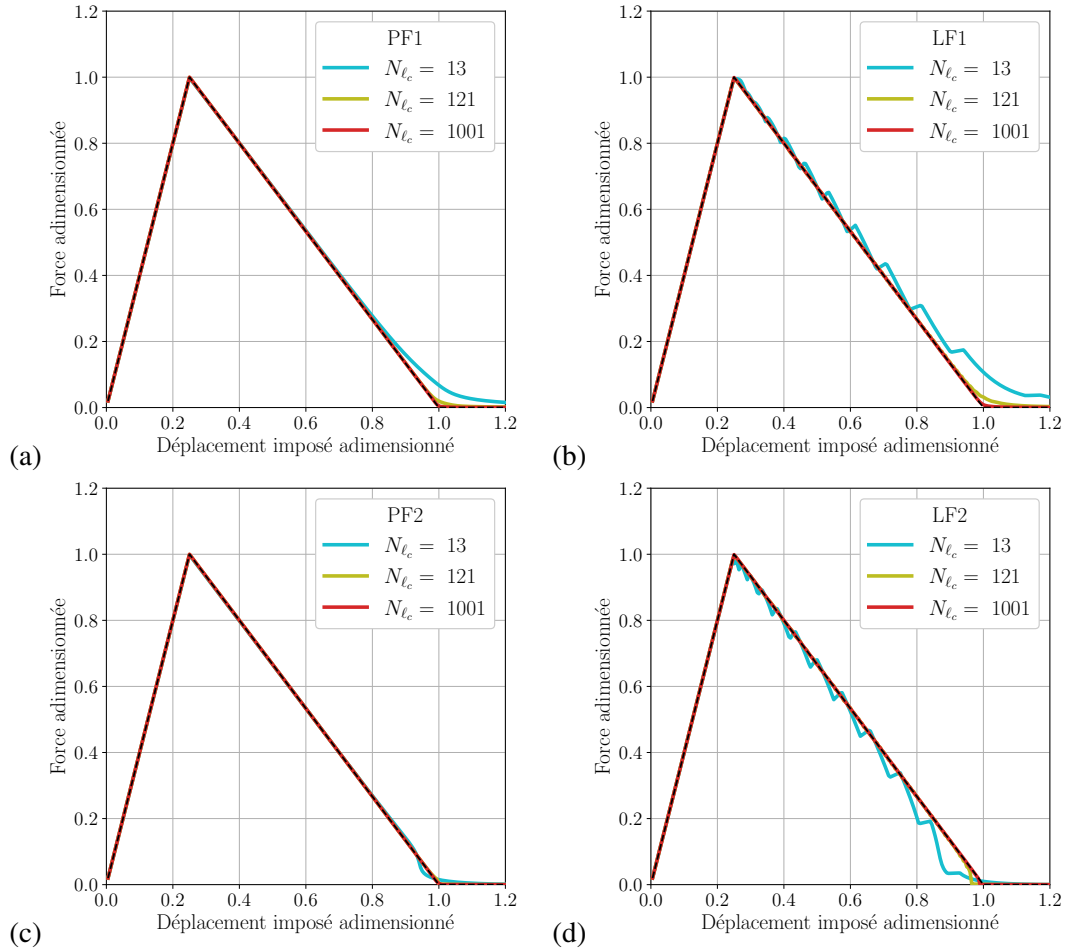


FIGURE 2 – Influence du raffinement du maillage sur les réponses force-déplacement. Les résultats théoriques sont représentés par des lignes pointillées.

**Lip-field solver utilisant 1 maillage (LF1)** Dans cette variante, un seul maillage est utilisé à la fois pour les champs de déplacement et d’endommagement, comme pour le solveur PF1.

## 4 Résultats

Les résultats sont exprimés en fonction de quantités sans dimension pour plus de clarté et de généralité : la position adimensionnée  $\bar{x} = x/L - 1/2$ , la force adimensionnée  $\bar{F} = \sigma/\sigma_t$  et le déplacement imposé adimensionnée  $\bar{U}_d = U_d/(2G_c/\sigma_t)$ .

### 4.1 Analyse de convergence du maillage

Dans cette section, une analyse de convergence de l’évolution de la courbe force-déplacement et des énergies selon le raffinement du maillage est effectuée. Les niveaux de raffinement sont définis en fonction du nombre d’éléments par demi-bande d’endommagement  $N_{\ell_c}$ , plutôt que du nombre total d’éléments dans le maillage. Ce choix est motivé par le fait que les performances du solveur dépendent plus directement de la résolution spatiale de la bande d’endommagement que de la densité globale du maillage.

Malgré les effets liés à la discrétisation, on observe que tous les solveurs convergent vers la solution théorique du problème, comme l’illustre la figure 2. Pour les formulations LF et PF, on obtient à la fois une équivalence énergétique et une équivalence ponctuelle dans le cadre des modèles de type cohésif.

Par ailleurs, lorsque les formulations PF et LF sont mises en œuvre sur un maillage unique, la valeur maximale de la variable d’endommagement tend à être sous-estimée au cours du processus d’évolution. Cette sous-estimation se répercute directement sur la quantité d’énergie dissipée, et conduit in fine à des courbes force-déplacement plus régulières que celles attendues théoriquement lorsque la variable d’endommagement approche de l’unité.

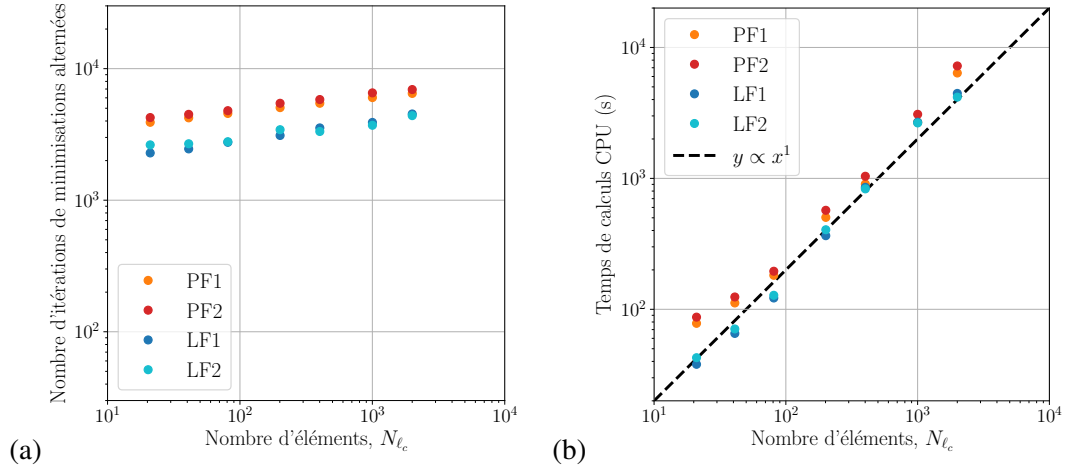


FIGURE 3 – Influence du raffinement du maillage sur (a) le nombre total d’itérations de minimisation alternées par étapes de chargement, et (b) le temps CPU.

À l’inverse, lorsque deux maillages distincts sont employés, les réponses force-déplacement obtenues présentent un caractère plus fragile que celles de la solution de référence convergente. Cette fragilisation numérique a pour effet de faciliter l’atteinte de la condition de rupture.

## 4.2 Évaluation des performances

Quel que soit le solveur et la méthode de discrétisation, le nombre d’itérations alternées requises à chaque pas de temps reste essentiellement indépendant du nombre d’éléments. C’est pourquoi le nombre total d’itérations alternées est aussi relativement indépendant du nombre d’éléments (fig. 3a). En revanche, à l’initiation de l’endommagement et lors de la rupture finale – deux points critiques pour l’évolution considérée – le nombre d’itérations alternées est particulièrement élevé, et cette augmentation devient plus prononcée à mesure que le nombre d’éléments croît. Par ailleurs, pour une taille de maillage donnée, le nombre d’itérations alternées ainsi que le nombre d’itérations du solveur d’endommagement sont plus élevés pour les solveurs PF que pour le solveur LF, ce qui se traduit par un temps CPU légèrement plus important (fig. 3b).

## 4.3 Une comparaison « aussi équitable que possible » entre les solveurs LF et PF

Sur la base des observations précédentes, on pourrait soutenir que les solveurs LF devraient être préférés aux solveurs PF. Toutefois, pour parvenir à une conclusion définitive, il est nécessaire d’analyser les erreurs associées aux deux approches. Une analyse de convergence plus concluante des différents solveurs présentés ci-dessus a été donc effectuée en fonction de deux mesures d’erreur principales : l’erreur en l’énergie dissipée ( $err_\Phi$ ) et l’erreur sur la réponse force-déplacement ( $err_F$ ). La figure 4 montre, à titre d’exemple, l’erreur sur la réponse force-déplacement en fonction du raffinement de maillage. Cette mesure d’erreur est définie comme suit :

$$err_F = \left( \sum_{n=1}^{N_{\text{steps}}} \left( \bar{F}(U_d^{(n)}) - \bar{F}_{\text{th}}(U_d^{(n)}) \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

où  $\bar{F}_{\text{th}}$  désigne la valeur de la force (adimensionnelle) calculée à l’aide de la solution théorique [11].

Cette analyse montre que la formulation LF est globalement plus sensible à la discrétisation spatiale que la formulation PF lorsqu’on considère les erreurs sur la réponse force-déplacement (voir fig. 4). Par ailleurs, l’utilisation de deux maillages conduit de manière systématique à une réduction de l’erreur, aussi bien pour l’énergie dissipée à la rupture que pour la réponse force-déplacement. Dans ce contexte, le solveur PF2 (implémentation non standard pour la méthode PF) apparaît comme celui nécessitant le maillage le moins raffiné pour atteindre un niveau d’erreur donné selon ces deux critères.

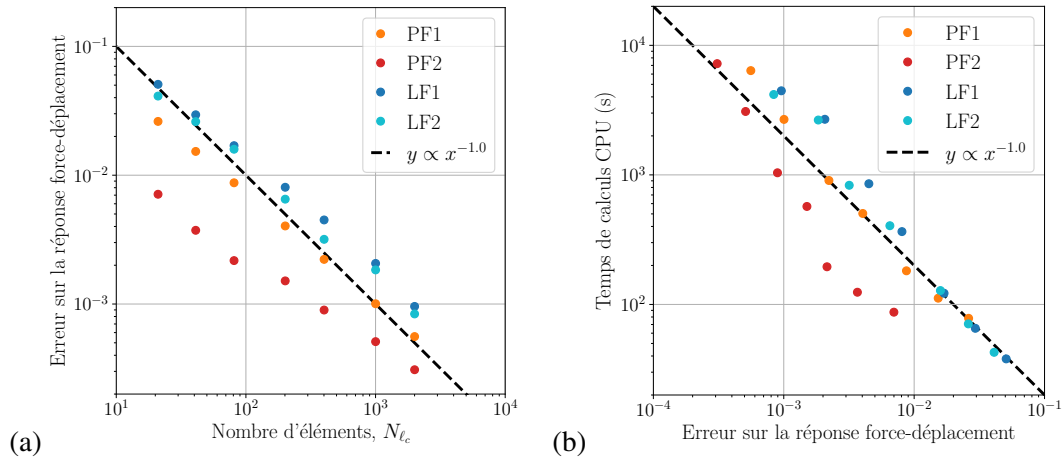


FIGURE 4 – (a) Influence du raffinement du maillage sur l’erreur sur la réponse force-déplacement. (b) Corrélations entre le temps CPU et l’erreur sur la réponse force-déplacement.

## 5 Conclusion

Une comparaison entre les formulations Lip-field et Phase-field pour la régularisation des modèles d’endommagement de type cohésif a été présentée. Une équivalence entre les réponses structurelles et les bandes d’endommagement des deux modèles a été établie. Une attention particulière a été accordée au choix de la discrétisation spatiale, qui diffère dans la littérature entre les solveurs standard Phase-field et Lip-field.

Les résultats numériques en 1D montrent que, pour une taille de maille donnée, l’erreur sur la réponse structurelle et sur l’énergie dissipée est plus faible lorsque l’on utilise l’approche à deux maillages, et que la convergence de l’énergie dissipée lors du raffinement du maillage est également plus rapide avec cette approche. Par conséquent, des maillages d’éléments finis moins raffinés sont généralement nécessaires pour obtenir des résultats convergents, ce qui se traduit aussi par une amélioration des performances en termes d’itérations de minimisation alternées et de temps CPU. Il semble donc judicieux de recommander l’utilisation de deux maillages dans les développements futurs des solveurs Lip-field et Phase-field. Évidemment, ces conclusions ne concernent que le cas unidimensionnel, mais il paraît raisonnable d’envisager leur extension aux cas bidimensionnels ou tridimensionnels. Ces aspects seront approfondis dans des travaux ultérieurs.

Enfin, la comparaison entre les formulations Phase-field et Lip-field met en évidence quelques différences — notamment la facilité ou la difficulté à initier l’endommagement, à atteindre le point de rupture, ou encore le nombre d’itérations nécessaires pour la convergence — mais révèle surtout de nombreuses similitudes dans les résultats obtenus. Parmi les différences, il est opportun de mentionner que, alors que la bande d’endommagement dans le modèle Phase-field conserve une largeur constante contrôlée par le paramètre de longueur interne, la bande d’endommagement dans la formulation Lip-field a tendance à s’élargir progressivement au fur et à mesure de l’évolution de l’endommagement. De plus, l’initiation de l’endommagement dans l’approche Lip-field reste essentiellement locale, déclenchée dans les régions où les contraintes sont maximales, tandis que dans le modèle Phase-field elle apparaît plus diffuse en raison de la régularisation inhérente au modèle.

## Références

- [1] G.A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [2] E. Lorentz and S. Andrieux. A variational formulation for nonlocal damage models. *International Journal of Plasticity*, 15(2) :119–138, 1999.
- [3] Blaise Bourdin, Gilles A. Francfort, and Jean-Jacques Marigo. The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1-3) :5–148, 2008.

- [4] Hanen Amor, Jean-Jacques Marigo, and Corrado Maurini. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1209–1229, 2009.
- [5] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10) :1273–1311, 2010.
- [6] E. Lorentz and S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures*, 40(12) :2905–2936, 2003.
- [7] Gianni Dal Maso and Flaviana Iurlano. Fracture models as Gamma-limits of damage models. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 12(4) :1657–1686, 2013.
- [8] Nicolas Moës and Nicolas Chevaugeon. Lipschitz regularization for softening material models : the Lip-field approach. *Comptes Rendus. Mécanique*, 349(2) :415–434, 2021.
- [9] G.I Barenblatt. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23(3) :622–636, 1959.
- [10] Jian-Ying Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103 :72–99, 2017.
- [11] Nicolas Moës, Benoît Lé, Nicolas Chevaugeon, and Jean-François Remacle. Phase-field and lip-field approaches for fracture with extreme mesh deformation (X-Mesh) : a one-dimensional study. *Comptes Rendus. Mécanique*, 353(G1) :1027–1051, 2025.
- [12] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4), 2012.
- [13] Antoine Marlot, Giuseppe Rastello, and Nicolas Moës. One or two meshes for Lip-field and Phase-field damage formulations? Comparison and performance assessment of standard/alternative FE solvers, 2026. Submitted.
- [14] Andreas Wächter and Lorenz T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1) :25–57, 2006.