

Vers la simulation et le recalage en temps réel d'un modèle numérique de poumon humain

A. Daby-seesaram^{†,‡}, K. Skardova[†], M. Genet[†]

[†] LMS, École Polytechnique, IPP/CNRS, Palaiseau, France,
[katerina.skardova, martin.genet]@polytechnique.edu

[‡] LMI, ENSTA, IPP/CNRS, Palaiseau, France,
alexandre.daby-seesaram@ensta.fr

Résumé — Ce travail présente une approche hybride combinant la Proper Generalised Decomposition (PGD) et des techniques d'apprentissage profond pour la résolution en temps réel d'équations aux dérivées partielles (EDP) paramétrées. Cette méthode utilise une décomposition tensorielle, propre à la PGD, pour contourner la malédiction de la dimension et s'appuie sur les outils récents d'apprentissage profond pour accroître sa versatilité. L'approche permet ainsi de traiter efficacement des problèmes de grande dimension impliquant plusieurs physiques et plusieurs configurations, tout en conservant l'interprétabilité inhérente à la PGD et à la méthode des éléments finis.

Mots clés — Jumeau numérique, PGD, Réseau de neurones, Interprétabilité.

1 Introduction

Les jumeaux numériques jouent un rôle de plus en plus important dans le contexte médical et présentent des perspectives prometteuses en terme d'aide au diagnostic et au pronostic [2]. En effet, l'hybridation d'un modèle numérique des organes d'un patient avec les données permet d'obtenir des prédictions personnalisées dont on peut ensuite tirer des biomarqueurs pertinents [20, 18, 17, 15]. Pour cela, un accès rapide aux solutions numériques est essentiel afin de réaliser les nombreuses simulations nécessaires à la phase d'identification du modèle (et à la quantification des incertitudes sur cette identification [23]), indispensable au développement de jumeaux numériques personnalisés. Pour que le jumeau numérique soit cliniquement pertinent, la simulation de l'organe doit combiner différents calculs (impliquant éventuellement différentes physiques) à plusieurs échelles [3, 5]. Ainsi, la grande variété de problèmes à résoudre exige que le cadre choisi soit à la fois robuste et polyvalent.

Concernant l'exigence de rapidité du jumeau numérique, plusieurs méthodes de réduction de modèle (ROM) ont été développées afin de diminuer le coût de calcul associé aux problèmes paramétrés. La plupart de ces méthodes nécessitent la résolution de problèmes en haute fidélité pour certains jeux de paramètres spécifiques, appelés *snapshots*, c'est par exemple le cas de la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [25, 6]. Ces *snapshots* sont ensuite compressés en une base réduite sur laquelle le problème original est projeté. Cette projection conduit à un système de faible dimension, pouvant être résolu plus efficacement pour de nouveaux paramètres. Ainsi, en plus des calculs à haute fidélité nécessaires à la construction de la base réduite, des calculs peu coûteux sont également requis pour chaque nouvelle évaluation du modèle. À l'inverse, les méthodes *a priori*, telles que la *Proper Generalised Decomposition* (PGD), proposent de construire le modèle réduit "à la volée" directement à partir de l'équation aux dérivées partielles régissant la physique du problème, supprimant ainsi la nécessité de calculer au préalable des *snapshots* coûteux [8]. Le problème paramétré peut alors être traité (i) comme une succession de résolutions PGD faisant varier le jeu de paramètres utilisé [16, 9], ou, (ii) en incluant les paramètres du problème dans la décomposition PGD résumant alors l'étape *online* à une simple évaluation du modèle réduit pour le jeu de paramètre choisi [7]. Plus récemment, les réseaux de neurones (NN) ont montré un certain potentiel pour fournir des modèles numériques efficaces, au prix d'une moindre interprétabilité [24, 4] et de la génération des données nécessaires à leur entraînement.

Ce travail propose une nouvelle méthode de réduction de modèle s'appuyant sur la polyvalence des approches récentes d'apprentissage profond, tout en restant interprétable, grâce à l'hybridation de ces outils avec la méthode des éléments finis et la PGD [10]. Cette méthode tire parti des avancées modernes,

telles que la différentiation automatique et la compatibilité GPU, tout en conservant l'interprétabilité propre à la méthode des éléments finis et à la PGD.

Chaque mode de la décomposition tensorielle est représenté par un réseau de neurones parcimonieux dans le formalisme HiDeNN [28], où les paramètres du réseau le contraignent à reproduire l'interpolation donnée par les fonctions de forme classiquement utilisées dans la méthode des éléments finis. Cette contrainte améliore l'interprétabilité du réseau et facilite l'optimisation de son architecture, ce qui renforce significativement la robustesse et réduit le coût de la phase d'entraînement. Le cadre HiDeNN peut être exploité pour déterminer de manière dynamique, au cours de l'entraînement, la discrétisation spatiale et paramétrique optimale [26]. Cette méthode hybride permet donc d'optimiser l'architecture du réseau en temps réel, réduisant ainsi le nombre d'hyper paramètres à fixer *a priori*.

2 Méthodes

On s'intéresse à la réponse élastique en quasi-statique d'une structure occupant un domaine Ω . Afin de pouvoir prendre en compte différentes simulations et différents patients, la variabilité des propriétés des matériaux, des chargements et de la géométrie est prise en compte à travers un ensemble de β paramètres $\{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket}$.

Dans les cas où seules des forces conservatives sont considérées, la résolution du problème de mécanique revient à trouver le champ de déplacement paramétré $\underline{u}(\underline{x}, \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket})$ minimisant l'énergie potentielle

$$E_p \left(\left\{ \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket} \right\} \right) := E_{p_{\text{int}}} \left(\left\{ \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket} \right\} \right) + E_{p_{\text{ext}}} \left(\left\{ \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket} \right\} \right) \quad (1)$$

tout en satisfaisant les conditions aux limites de Dirichlet

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_d. \quad (2)$$

On cherche ici à calculer un métamodèle du champ de déplacement solution de ce problème paramétré. Afin de contourner la malédiction de la dimension, on choisit d'utiliser la PGD dont l'idée est de représenter la solution paramétrée sous la forme d'une décomposition tensorielle, *i.e.*, comme une somme de produits de fonctions à variables séparées. Aussi, la solution est cherchée sous la forme

$$\underline{u}(\underline{x}, \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket}) = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(\underline{x}) \prod_{j=1}^{\beta} \lambda_i^j(\mu_j), \quad (3)$$

avec m le nombre de modes PGD. Contrairement aux méthodes *a posteriori*, les modes spatiaux $\bar{u}_i(\underline{x})$ sont calculés "à la volée" et ne nécessitent pas le calcul de solutions hautes fidélité. La résolution du problème paramétré se traduit donc par le problème de minimisation suivant

$$\left(\left\{ \bar{u}_i \right\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}, \left\{ \lambda_i^j \right\}_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}^{j \in \llbracket 1, \beta \rrbracket} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \arg \min \\ \left(\bar{u}_1, \left\{ \bar{u}_i \right\}_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket} \right) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}_0 \\ \left\{ \lambda_i^j \right\}_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}^{j \in \llbracket 1, \beta \rrbracket} \in \left(\times_{j=1}^{\beta} \mathcal{L}_2(\mathcal{B}_j) \right)^{m-1} \end{array} \right\} \int_{\mathcal{B}} E_p(\underline{u}) \, d\beta, \quad (4)$$

où chaque \mathcal{B}_i correspond au domaine de définition du paramètre μ_i .

Afin de proposer un cadre le plus versatile possible, les modes spatiaux et paramétriques de la décomposition tensorielle décrite à l'Équation 3 sont représentés par des réseaux de neurones parcimonieux, reproduisant une interpolation éléments finis, introduits par Zhang *et al.* [28]. La représentations PGD de notre solution s'exprime alors comme une combinaison de m réseaux HiDeNN correspondants aux m modes spatiaux $\{\bar{u}_i(x)\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ et $m \times \beta$ modes paramétriques $\{\lambda_i^j\}_{i \in \llbracket 2, m \rrbracket}^{j \in \llbracket 1, \beta \rrbracket}$ comme illustré en Figure 1.

On peut alors résoudre le problème de minimisation à l'aide des optimiseurs classiquement utilisés pour entraîner des réseaux de neurones profonds. La fonction coût \mathcal{L} est alors choisie comme l'énergie de notre système définie à l'Équation 1, que l'on intègre sur l'hypercube paramétrique $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\beta} \mathcal{B}_i$. La fonction coût à minimiser est donc

$$\mathcal{L} := \int_{\mathcal{B}} E_p(\underline{u}, \{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket}) d\beta. \quad (5)$$

La NN-PGD ainsi définie, constitue un cadre versatile permettant de trouver une solution PGD à un problème paramétré en minimisant une fonction coût basée sur l'EDP régissant la physique du problème à l'instar des PINN (*Physics Informed Neural Networks*) tout en conservant l'interprétabilité totale de la PGD et des éléments finis.

À l'instar de la PGD, les modes de la décomposition tensorielle sont ajoutés de manière glou-tonne au cours du processus d'entraînement. Le nombre adéquat de modes dans la décomposition n'a donc pas besoin d'être connu avant de résoudre le problème paramétré : la structure sous-jacente est apprise au fur et à mesure, et, l'architecture du réseau est ainsi optimisée au cours du processus d'entraînement lui-même. Le critère de convergence repose sur la stagnation de la fonction coût, indiquée par la décroissance du gradient de cette fonction par rapport au nombre d'itérations. En d'autres termes, la stagnation est atteinte lorsque

$$\hat{\mathcal{L}} := \frac{\nabla_{\text{epoch}} \mathcal{L}}{\mathcal{L}} = 2 \frac{\mathcal{L}_{n-1} - \mathcal{L}_n}{\mathcal{L}_{n-1} + \mathcal{L}_n} \leq \eta_c, \quad (6)$$

avec η_c un seuil de stagnation et \mathcal{L}_n la valeur de la fonction coût à la $n^{\text{ième}}$ itération. Lorsque la stagnation est atteinte, un nouveau mode est ajouté. Si la fonction coût continue de stagner, alors l'entraînement est considéré comme terminé et la décomposition tensorielle est supposée avoir convergé, sinon, l'entraînement se poursuit.

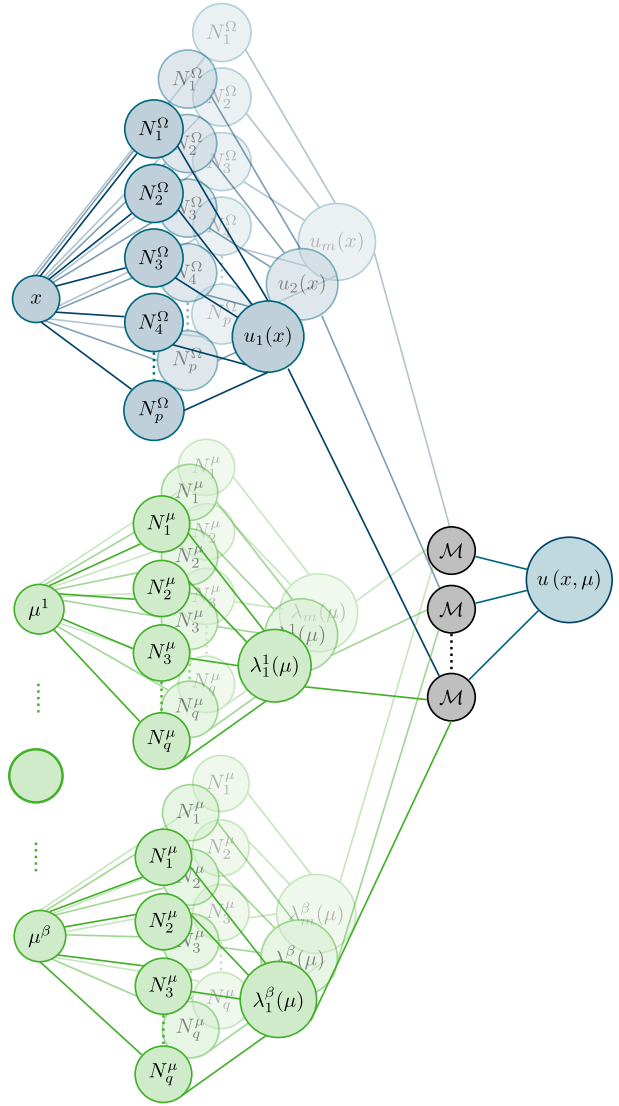


FIGURE 1 • Illustration de l'interpolation NN-PGD

3 Résultats numériques¹

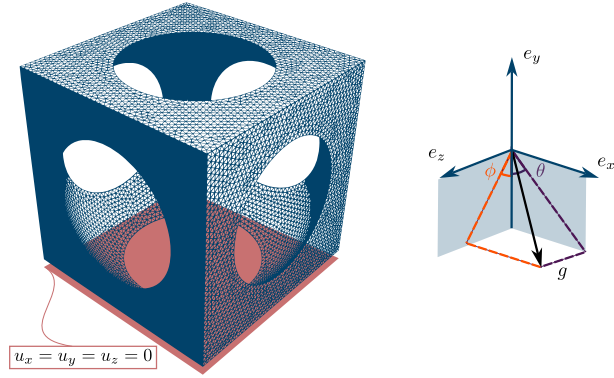


FIGURE 2 • Géométrie et chargement du problème paramétré

Afin d'illustrer la NN-PGD, considérons le problème paramétré suivant. Un cube troué illustré en Figure 2, admettant un module d'Young E variable, est plongé dans le champ de gravité

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} \rho g \sin(\theta) \\ -\rho g \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \rho g \cos(\theta) \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

paramétré par deux angles $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ comme indiqué sur la Figure 2. En résolvant ce problème paramétré avec la NN-PGD dans le cadre proposé, on obtient un métamodèle de haute dimension $u(x, E, \theta, \phi)$ sous la forme d'un tenseur d'ordre quatre.

Un tel modèle de substitution peut ensuite être évalué à faible coût, en temps réel, pour toute configuration paramétrique située à l'intérieur de

l'hypercube

$$\mathcal{B} = [E_{\min}, E_{\max}] \times [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \times [\phi_{\min}, \phi_{\max}], \quad (8)$$

où μ_{\min} (respectivement μ_{\max}) représente la borne inférieure (respectivement supérieure) de l'espace unidimensionnel associé au paramètre μ , vu au cours de l'entraînement.

3.1 Distribution spatiale de l'erreur associée à la solution PGD

Le champ d'erreur

$$\eta_{\text{FEM}} = \frac{\underline{u}_{\text{ROM}}(E, \theta, \phi) - \underline{u}_{\text{FEM}}(E, \theta, \phi)}{\max(\|\underline{u}_{\text{FEM}}\|)} \quad (9)$$

est présenté en Figure 4 pour trois configurations paramétriques qui n'ont pas été vues pendant l'entraînement. La solution PGD $\underline{u}_{\text{ROM}}$ est évaluée pour chacune d'elles et comparée à la référence $\underline{u}_{\text{FEM}}$ calculée par éléments finis pour le même jeu de paramètres. On constate que l'approximation de rang faible obtenue par PGD mène à des erreurs raisonnables qui sont à mettre en regard des gains significatifs en terme de temps de calcul ainsi obtenus. En effet, dans ce cas le modèle réduit prend environ 15 ms à être évalué contre 1.4 s pour la résolution du problème éléments finis sur une puce Apple M2.

1. Les résultats présentés ont été obtenus à l'aide du code ouvert NeuROM [11].

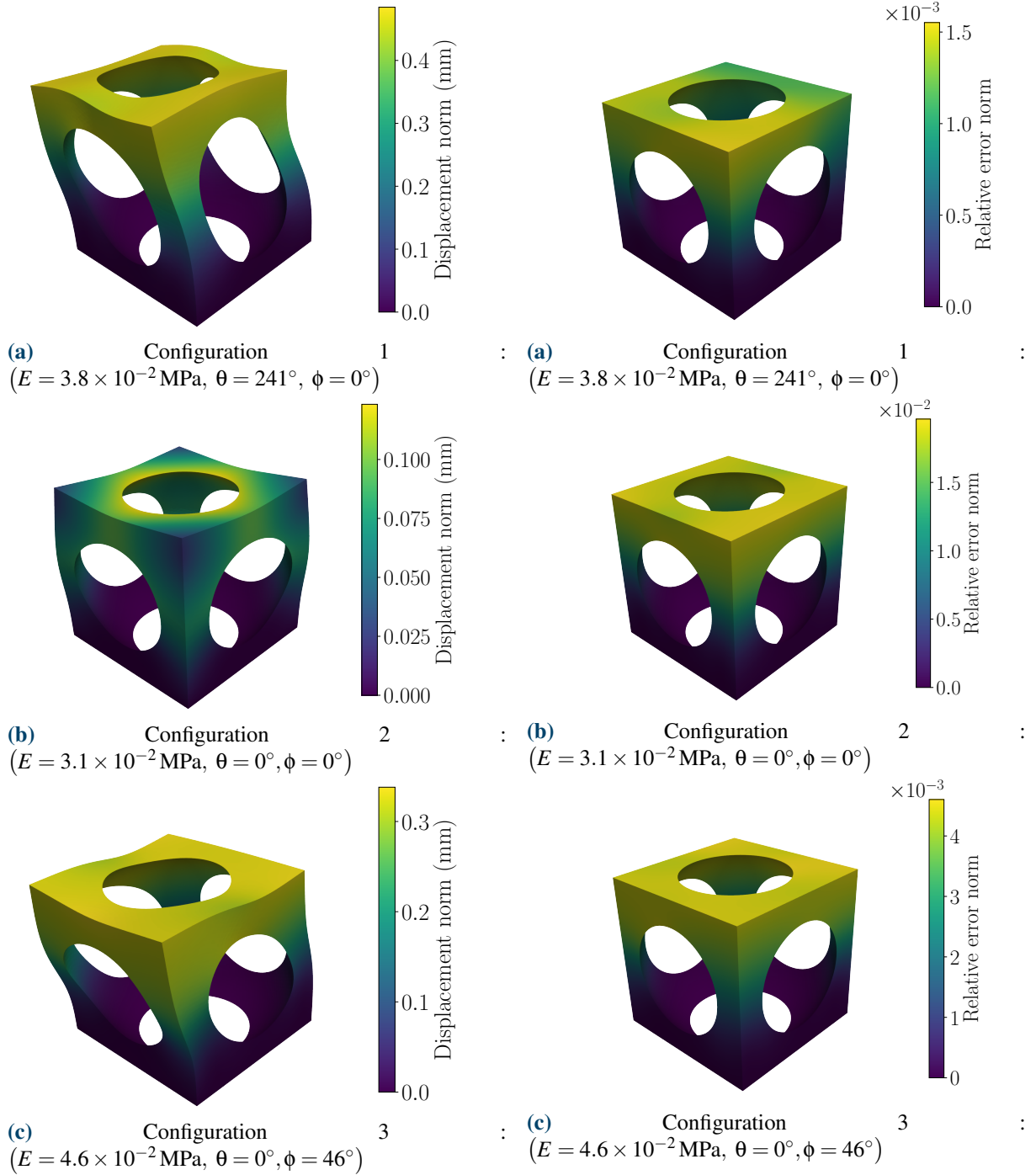


FIGURE 3 • Modèle réduit évalué pour trois configurations de paramètres — norme du déplacement tracée sur la structure déformée (facteur d'échelle de 5).

FIGURE 4 • Erreur du modèle réduit évalué pour trois configurations de paramètres — norme de l'erreur tracée sur la structure déformée (facteur d'échelle de 5).

3.2 Bénéfice de l'interprétabilité

La phase d'entraînement peut également être optimisée en tirant parti de l'interprétabilité de la méthode. En effet, l'interprétabilité permet de transférer l'information d'un réseau à un autre en initialisant les paramètres du second avec les valeurs interpolées du premier. La décomposition tensorielle peut ainsi être d'abord calculée sur un maillage grossier, puis simplement raffinée sur un maillage plus fin, réduisant ainsi drastiquement le coût associé à la détermination de la solution PGD sur le maillage fin.

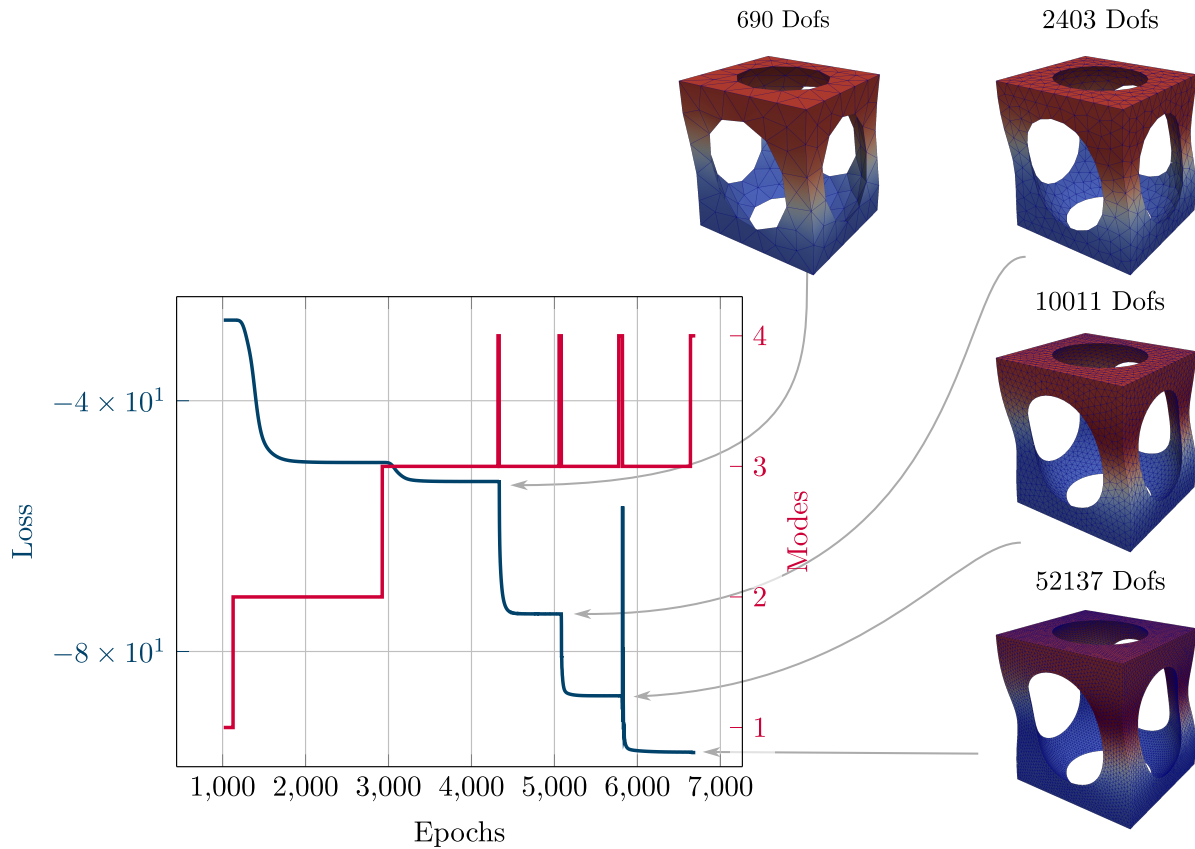


FIGURE 5 • Convergence de l’entraînement Multigrille (4 niveaux) pour le cas 3D et illustration du raffinement du ROM.

L’entraînement commence avec un maillage grossier, puis, une fois la convergence atteinte, le maillage est affiné et le nouveau réseau est initialisé avec le réseau préalablement entraîné. La Figure 5 illustre une stratégie d’apprentissage à quatre niveaux. Cette figure montre que 70 % de l’entraînement est réalisé sur le maillage grossier, ainsi constitué d’itérations peu coûteuses, tandis que l’ajustement sur les maillages plus fins ne représente que les 30 % restants du nombre total d’itérations. Dans une telle approche multigrille, l’étude de convergence en maillage est effectuée simultanément avec l’entraînement.

4 Conclusion

Cet article montre que le formalisme HiDeNN peut être utilisé comme un bloc de construction élémentaire pour générer les modes d’une solution PGD. Ainsi, un modèle réduit basé sur une décomposition tensorielle peut être construit automatiquement en s’appuyant sur la rétropropagation et les outils modernes développés pour les approches d’apprentissage profond. En tirant parti de ces outils, la détermination de la décomposition tensorielle devient simple et efficace. La phase d’entraînement permet de déterminer la dimensionnalité, c’est-à-dire le nombre de modes PGD, “à la volée”, simultanément à la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant le problème. Le cadre proposé est versatile, car un changement de physique ou de paramétrisation peut être effectué en adaptant simplement la fonction coût utilisée, sans impacter aucun autre aspect de la méthode. Cela le rend particulièrement adapté aux contextes où des jumeaux numériques de natures différentes doivent coexister [21, 22].

5 Perspectives

Cet outil offre donc un cadre idéal pour la construction d’un jumeau numérique patient-spécifique de poumons humains. Dans cet objectif, la prise en compte de la variabilité de forme des organes des patients est capitale. Pour ce faire les formes de chacun des 40 patients d’une cohorte ont été recalées, c’est-à-dire que le *mapping* entre un maillage sphérique générique et la forme du poumon des patients a

été calculé². Ce *mapping* \mathcal{M} est solution du problème de minimisation suivant

$$\mathcal{M} = \arg \min \int_{\Omega_t = \mathcal{M}(\Omega_0)} I \circ \mathcal{M} dV \quad (10)$$

où I correspond à l’image 3D segmentée du poumon traitée de manière à ce que les voxels en dehors du poumon aient une valeur positive $a \in \mathbb{R}^+$ et les voxels à l’intérieur du poumon aient une valeur négative $-a$. Ce faisant, le problème de minimisation décrit à l’Équation 10 vise à déformer la sphère initiale Ω_0 de manière à ce qu’elle recouvre un maximum du poumon en recouvrant le moins d’arrière plan possible. On résout ce problème en considérant une forme variationnel régularisée $H^1(\mathbb{R}^3)$ [1, 19]. Après avoir recalé les formes de tous les patients de la cohorte, on peut générer un modèle de forme [27] des poumons en cherchant un espace de dimension réduite dans lequel on peut décrire l’ensemble des *mappings*. Les coordonnées $\{\mu_i\}_{i \in \llbracket 1, \beta \rrbracket}$ de chaque patient dans cet espace de petite dimension peuvent alors servir de paramètres de forme nourrissant la NN-PGD précédemment décrite. On obtient alors un jumeau numérique prenant en compte la variation de forme des différents poumons et pouvant fournir en temps réel la solution mécanique du problème pour n’importe quelle nouvelle forme de poumon à partir du *mapping* entre la sphère et la forme patient-spécifique.

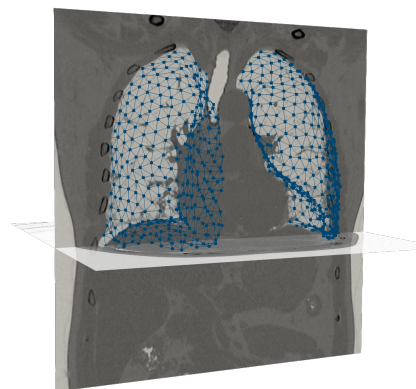


FIGURE 6 • Maillage recalé et scan-CT de poumons

Références

- [1] G. Allaire, C. Dapogny, F. Jouve. Shape and topology optimization. A. Bonito, R. H. Nochetto, éd. *Geometric Partial Differential Equations, Part II*, vol. 22 de *Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier, jan. 2021.
- [2] P.-Y. Brillet, A. Peyraut, J.-F. Bernaudin, C. Fetita, H. Nunes, M. Genet. What is personalized lung poromechanical modeling and how can it improve the understanding and management of fibrotic interstitial lung diseases? *Expert Review of Respiratory Medicine*, 19(3):191–194, mars 2025. doi : [10.1080/17476348.2025.2464886](https://doi.org/10.1080/17476348.2025.2464886).
- [3] K. Burrowes, A. Swan, N. Warren, M. Tawhai. Towards a virtual lung : Multi-scale, multi-physics modelling of the pulmonary system. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1879):3247–3263, juil. 2008. doi : [10.1098/rsta.2008.0073](https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0073).
- [4] F. Caforio, F. Regazzoni, S. Pagani, E. Karabelas, C. Augustin, G. Haase, G. Plank, A. Quarteroni. Physics-informed neural network estimation of material properties in soft tissue nonlinear biomechanical models. *Computational Mechanics*, juil. 2024. doi : [10.1007/s00466-024-02516-x](https://doi.org/10.1007/s00466-024-02516-x).
- [5] R. Chabiniok, V. Y. Wang, M. Hadjicharalambous, L. Asner, J. Lee, M. Sermesant, E. Kuhl, A. A. Young, P. Moireau, M. P. Nash, D. Chapelle, D. A. Nordsletten. Multiphysics and multiscale modelling, data–model fusion and integration of organ physiology in the clinic : Ventricular cardiac mechanics. *Interface Focus*, 6(2):20150083, avr. 2016. doi : [10.1098/rsfs.2015.0083](https://doi.org/10.1098/rsfs.2015.0083).
- [6] A. Chatterjee. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7):808–817, 2000.
- [7] F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, R. Keunings. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11):578–592, juin 2011. doi : [10.1016/j.jnnfm.2010.12.012](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2010.12.012).
- [8] F. Chinesta, P. Ladeveze, E. Cueto. A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4):395–404, nov. 2011. doi : [10.1007/s11831-011-9064-7](https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7).
- [9] A. Daby-Seesaram, D. Néron, P.-E. Charbonnel, A. Fau. Model-order reduction framework for non-linear dynamics problems involving multiple non-parametrised loading configurations for damage assessment. *Computational Mechanics*, 76(1):45–58, juil. 2025. doi : [10.1007/s00466-024-02586-x](https://doi.org/10.1007/s00466-024-02586-x).

2. Ces travaux sont implémentés dans le code ouvert *dolphin-warp* [13] utilisée notamment dans [14, 12]

- [10] A. Daby-Seesaram, K. Škardová, M. Genet. Finite Element Neural Network Interpolation : Part II - Hybridisation with the Proper Generalised Decomposition for non-linear surrogate modelling. *Computational Mechanics*, 2025. doi: [10.1007/s00466-025-02676-4](https://doi.org/10.1007/s00466-025-02676-4).
- [11] A. Daby-Seesaram, K. Škardová, M. Genet. NeuROM. Zenodo, oct. 2025, doi: [10.5281/zenodo.13772740](https://doi.org/10.5281/zenodo.13772740).
- [12] M. Genet. Finite strain formulation of the discrete equilibrium gap principle : Application to mechanically consistent regularization for large motion tracking. *Comptes Rendus. Mécanique*, 351(G2):429–458, déc. 2023. doi: [10.5802/crmeca.228](https://doi.org/10.5802/crmeca.228).
- [13] M. Genet, C. Patte, E. Berberoğlu, F. Álvarez-Barrientos, C. Laville, A. Peyraut, A. Daby-Seesaram. Dolfin_warp. Zenodo, jan. 2025, doi: [10.5281/zenodo.14762136](https://doi.org/10.5281/zenodo.14762136).
- [14] M. Genet, C. T. Stoeck, C. von Deuster, L. C. Lee, S. Kozerke. Equilibrated warping : Finite element image registration with finite strain equilibrium gap regularization. *Medical Image Analysis*, 50:1–22, déc. 2018. doi: [10.1016/j.media.2018.07.007](https://doi.org/10.1016/j.media.2018.07.007).
- [15] A. Gonsard, M. Genet, D. Drummond. Digital twins for chronic lung diseases. *European Respiratory Review*, 33(174):240159, oct. 2024. doi: [10.1183/16000617.0159-2024](https://doi.org/10.1183/16000617.0159-2024).
- [16] C. Heyberger, P. A. Boucard, D. Néron. A rational strategy for the resolution of parametrized problems in the PGD framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 259:40–49, juin 2013. doi: [10.1016/j.cma.2013.03.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.03.002).
- [17] R. Laubenbacher, B. Mehrad, I. Shmulevich, N. Trayanova. Digital twins in medicine. *Nature Computational Science*, 4(3):184–191, mars 2024. doi: [10.1038/s43588-024-00607-6](https://doi.org/10.1038/s43588-024-00607-6).
- [18] C. Laville, C. Fetita, T. Gille, P.-Y. Brilllet, H. Nunes, J.-F. Bernaudin, M. Genet. Comparison of optimization parametrizations for regional lung compliance estimation using personalized pulmonary poromechanical modeling. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 22(5):1541–1554, oct. 2023. doi: [10.1007/s10237-023-01691-9](https://doi.org/10.1007/s10237-023-01691-9).
- [19] J. W. Neuberger. *Sobolev Gradients and Differential Equations*, vol. 1670 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [20] C. Patte, P.-Y. Brilllet, C. Fetita, J.-F. Bernaudin, T. Gille, H. Nunes, D. Chapelle, M. Genet. Estimation of Regional Pulmonary Compliance in Idiopathic Pulmonary Fibrosis Based on Personalized Lung Poromechanical Modeling. *Journal of Biomechanical Engineering*, 144(091008), mars 2022. doi: [10.1115/1.4054106](https://doi.org/10.1115/1.4054106).
- [21] C. Patte, M. Genet, D. Chapelle. A quasi-static poromechanical model of the lungs. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 21(2):527–551, avr. 2022. doi: [10.1007/s10237-021-01547-0](https://doi.org/10.1007/s10237-021-01547-0).
- [22] A. Peyraut, M. Genet. A model of mechanical loading of the lungs including gravity and a balancing heterogeneous pleural pressure. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, oct. 2024. doi: [10.1007/s10237-024-01876-w](https://doi.org/10.1007/s10237-024-01876-w).
- [23] A. Peyraut, M. Genet. Inverse Uncertainty Quantification for Personalized Biomechanical Modeling : Application to Pulmonary Poromechanical Digital Twins. *Journal of Biomechanical Engineering*, 147(8):081003, août 2025. doi: [10.1115/1.4068578](https://doi.org/10.1115/1.4068578).
- [24] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis. Physics-informed neural networks : A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378:686–707, fév. 2019. doi: [10.1016/j.jcp.2018.10.045](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045).
- [25] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561–571, 1987. doi: [10.1090/qam/910462](https://doi.org/10.1090/qam/910462).
- [26] K. Škardová, A. Daby-Seesaram, M. Genet. Finite element neural network interpolation : Part I—interpretable and adaptive discretization for solving PDEs. *Computational Mechanics*, août 2025. doi: [10.1007/s00466-025-02677-3](https://doi.org/10.1007/s00466-025-02677-3).
- [27] J.-F. Uhl, J. Jorge, D. S. Lopes, P. F. Campos. *Digital Anatomy : Applications of Virtual, Mixed and Augmented Reality*. Springer Nature, mai 2021.
- [28] L. Zhang, L. Cheng, H. Li, J. Gao, C. Yu, R. Domel, Y. Yang, S. Tang, W. K. Liu. Hierarchical deep-learning neural networks : Finite elements and beyond. *Computational Mechanics*, 67(1):207–230, jan. 2021. doi: [10.1007/s00466-020-01928-9](https://doi.org/10.1007/s00466-020-01928-9).