

Couplage global/local en dynamique des structures : une méthode globale-en-temps

M. Kharrat^{1,2}, N. Feld¹, P. Gosselet², A. Parret-Freaud³

¹ Safran Transmission Systems, France, {monia.kharrat, nicolas.feld}@safrangroup.com

² Lamcube, Université de Lille, France, pierre.gosselet@univ-lille.fr

³ Safran Tech, France, augustin.parret-freaud@safrangroup.com

Résumé — Ce travail adapte la méthode de relaxation par forme d'onde de Schwarz (SWR) au couplage global/local en dynamique des structures. La méthode proposée repose sur une organisation globale en temps : chaque sous-domaine résout ses équations sur l'ensemble de l'intervalle $[0, T]$ avant d'échanger les déplacements et les efforts de réaction à l'interface. Les résultats sur un cas test académique montrent une réduction du nombre d'échanges nécessaires à la convergence, sans perte notable de précision. L'application visée concerne des structures industrielles, telles que les lignes d'engrenages soumises à des régimes dynamiques.

Mots clés — Couplage global/local, dynamique des structures, forme d'onde de Schwarz, décomposition de domaine.

1 Introduction

La simulation fidèle d'une structure complète requiert souvent des modèles raffinés, capables de représenter des phénomènes locaux tels que la plasticité, la fissuration ou la propagation d'ondes. Cependant, appliquer partout un tel niveau de détail entraîne un coût numérique élevé, généralement incompatible avec les contraintes industrielles.

Les méthodes de couplage global/local permettent de répondre à cette difficulté. Elles associent un modèle global simplifié, décrivant le comportement d'ensemble de la structure, à des sous-modèles locaux plus fins dans les zones où les gradients ou les non-linéarités jouent un rôle majeur. Ce principe hiérarchique permet de concentrer les ressources de calcul uniquement aux endroits où elles sont réellement nécessaires, tout en assurant la compatibilité mécanique à l'échelle de la structure.

Ces approches ont été largement étudiées dans des cadres quasi-statiques ou stationnaires [7], et se révèlent performantes pour capturer des phénomènes localisés tels que la plasticité ou l'endommagement. Leur efficacité repose sur un transfert fiable des champs de déplacement, de contrainte et d'énergie entre le modèle global et les zones détaillées. En revanche, leur extension aux régimes dynamiques fait apparaître des difficultés spécifiques, en particulier lorsque la structure est soumise à des impacts, à des ondes de choc ou à des excitations rapides [2]. Dans ces cas, l'ajustement temporel entre modèles global et local devient déterminant pour préserver la fidélité des champs transférés.

Dans cette perspective, la méthode de relaxation par forme d'onde de Schwarz (SWR), déjà introduite dans d'autres domaines, tels que l'acoustique, la mécanique des fluides ou les systèmes multiphysiques [3, 4, 5], constitue une approche adaptée au traitement de ces régimes dynamiques. Elle repose sur une décomposition du domaine en sous-domaines spatiaux et temporels, avec des échanges itératifs aux interfaces. Son application en mécanique des structures reste toutefois encore peu explorée.

L'objectif de ce travail est d'adapter la méthode de relaxation par forme d'onde de Schwarz au couplage global/local en dynamique des structures et d'en évaluer les performances en termes de convergence et de précision. L'application visée concerne des structures industrielles complexes telles que des lignes d'engrenages, où une géométrie globale relativement simple coexiste avec des zones de contact nécessitant un raffinement local important.

La figure 1 présente un exemple de pignon, montrant le modèle global et le modèle local associé, avec la distribution du déplacement total.

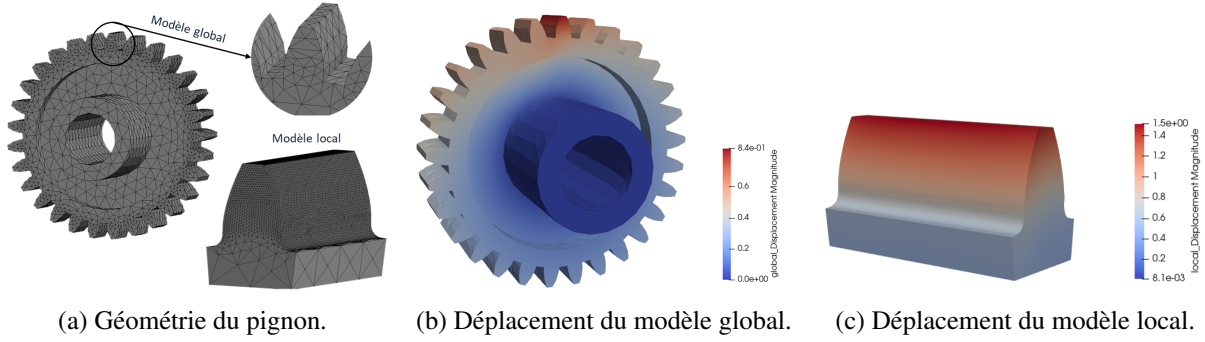


FIGURE 1 – Illustration du cas d’application : géométrie du pignon et déplacement des modèles global et local.

Ce résumé est structuré de la manière suivante. La section 2 décrit la méthodologie : le modèle de référence, l’approche séquentielle et la nouvelle méthode proposée sont présentés, puis appliqués à un cas test académique. La section 3 analyse les résultats en termes de convergence. Enfin, la section 4 expose les conclusions et les perspectives du travail.

2 Méthodologie

2.1 Modèle de référence

Considérons une structure mécanique modélisée sur un domaine Ω (figure 2).

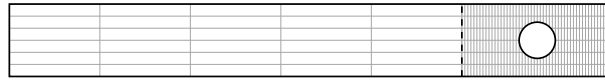


FIGURE 2 – Domaine complet Ω : modèle de référence.

Sous l’hypothèse des petites déformations, le champ de déplacement u , le tenseur de déformation $\varepsilon(u)$ ainsi que le tenseur des contraintes de Cauchy σ sont définis sur Ω . Ce domaine est soumis à une force volumique f , à des conditions de Dirichlet u_d sur une partie du bord $\partial_d\Omega$, ainsi qu’à des conditions de Neumann g sur $\partial_n\Omega$. Le comportement est supposé élastique linéaire, caractérisé par le tenseur de Hooke H .

Le problème mécanique consiste à trouver (u, σ) tels que

$$\begin{cases} u = u_d & \text{sur } \partial_d\Omega, \\ \operatorname{div} \sigma + f = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma = H : \varepsilon(u) & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \partial_n\Omega \end{cases}$$

où n désigne la normale extérieure au bord.

Ce modèle de référence fournit la solution complète du problème mécanique sur l’ensemble du domaine Ω . Il constitue la base de comparaison pour évaluer les différentes stratégies de couplage global/local étudiées dans la suite.

2.2 Couplage global/local – approche séquentielle

Dans le cadre du couplage global/local, le domaine de référence Ω n’est plus considéré comme une entité unique, mais est décomposé en deux domaines distincts se recouvrant (figure 3) :

- Domaine global Ω_G , représentant l’ensemble de la structure avec un maillage relativement grossier ;

— Domaine local Ω_L , limité à la zone critique où un raffinement est nécessaire.

Le sous-domaine complémentaire, noté $\Omega_C = \Omega_G \setminus \Omega_L$, correspond à la partie du domaine global non couverte par le domaine local.

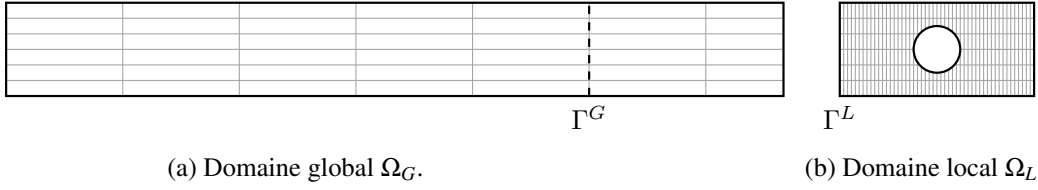


FIGURE 3 – Décomposition du domaine Ω en domaines global et local.

L'interface $\Gamma = \Omega_G \cap \partial\Omega_L$ se situe sur un bord du domaine local et à l'intérieur du modèle global. C'est à cette interface que sont appliquées les conditions de couplage :

$$\begin{cases} u_{L|\Gamma} = u_{G|\Gamma}, \\ \lambda_{C|\Gamma} + \lambda_{L|\Gamma} = 0 \end{cases} \quad \text{à chaque instant}$$

où λ représente l'effort de réaction. La première condition assure la continuité des déplacements sur Γ et la seconde garantit l'équilibre des forces à l'interface.

Dans le couplage global/local, la continuité des déplacements est automatiquement vérifiée, tandis que l'équilibre des forces est obtenue à convergence d'un processus itératif qui détermine l'effort p à appliquer sur Γ_G pour simuler l'effet de la zone locale dans le modèle global.

Lorsque le modèle est utilisé en dynamique sur des grilles temporelles synchrones, ces échanges sont effectués à chaque pas de temps t_n et répétés de manière itérative jusqu'à convergence. Le schéma de l'approche séquentielle correspondant est présenté dans l'algorithme 1.

Algorithm 1 Couplage global/local – approche séquentielle

```

for  $n = 1 \dots t_n$  do ▷ Boucle temporelle
   $p_n^0 = 0$ 
  repeat ▷ Couplage
    Résolution du modèle global à  $t_n$ , avec  $p_n^i$  imposé sur  $\Gamma \rightarrow (u_G^i, \lambda_{C|\Gamma}^i)$ 
    Transfert des conditions au modèle local
    Résolution du modèle local à  $t_n$ , avec  $u_{L|\Gamma}^i = u_{G|\Gamma}^i$  imposé  $\rightarrow (u_L^i, \lambda_{L|\Gamma}^i)$ 
    Calcul du résidu de couplage  $r_n^i = -(\lambda_{C|\Gamma}^i + \lambda_{L|\Gamma}^i)$ 
    Mise à jour des champs d'échange :  $p_n^{i+1} = \omega r_n^i$ 
  until Convergence du couplage
end for

```

Cette approche, simple à mettre en œuvre, nécessite d'itérer à chaque pas de temps afin d'assurer la mise à jour cohérente des champs d'échange et maintenir la consistance du schéma d'intégration. Ces étapes de synchronisation entre les modèles peuvent induire des pertes de performance, notamment lorsqu'il existe de nombreuses zones locales.

2.3 Approche proposée : Couplage global/local – approche globale en temps

Pour pallier les limites de l'approche séquentielle et améliorer la flexibilité dans la gestion des modèles global et local, nous proposons une réorganisation du couplage fondée sur la méthode de relaxation par forme d'onde de Schwarz (SWR), désignée par la suite comme approche globale en temps. Chaque sous-domaine évolue indépendamment sur l'ensemble de l'intervalle temporel $[0, T]$, plutôt que pas à pas. Les champs de déplacement u et d'effort λ sont échangés à l'interface Γ sur l'ensemble l'intervalle temporel à chaque itération i de la boucle de couplage.

Il s'agit essentiellement d'une réorganisation du schéma de couplage : les boucles temporelle et itérative sont inversées, tandis que les conditions de transmission à l'interface demeurent inchangées par rapport à l'approche séquentielle.

Le schéma algorithmique correspondant est présenté dans l’algorithme 2.

Algorithm 2 Couplage global/local – approche globale en temps

```
repeat
  for  $n = 1 \dots t_n$  do
    Résolution du modèle global
  end for
  Transfert des déplacements au modèle local
  for  $n = 1 \dots t_n$  do
    Résolution du modèle local
  end for
  Mise à jour des champs d’échange
until Convergence du couplage
```

Cette approche assure la continuité mécanique sur l’ensemble de la période considérée, tout en permettant aux sous-domaines de résoudre leurs équations de manière autonome sur l’intégralité de l’intervalle temporel. Elle facilite ainsi la gestion des échanges d’informations à l’interface Γ , réduit la dépendance aux itérations temporelles pas à pas, et offre une meilleure flexibilité pour traiter des zones locales nombreuses ou complexes sans compromettre la cohérence globale du modèle.

2.4 Application numérique

2.4.1 Modèle géométrique et conditions de chargement

Afin de valider l’approche proposée, un cas test académique est considéré. Il s’agit d’une barre de longueur 1 m, de section $0,1 \times 0,1 \text{ m}^2$, présentant un trou de diamètre 0,02 m situé à son extrémité droite (figure 4). Cette zone constitue la région critique nécessitant un raffinement local (figure 2).

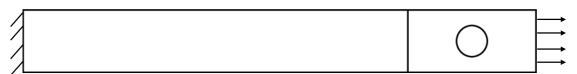


FIGURE 4 – Géométrie de la barre.

Le matériau de la barre est de l’acier, caractérisé par les propriétés suivantes : module d’Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et densité $\rho = 8100 \text{ kg/m}^3$.

Concernant les conditions aux limites, l’extrémité gauche est encastrée (condition de Dirichlet), tandis que l’extrémité droite est chargée par un choc modélisé par un demi-sinus d’amplitude maximale 50 N et de durée 0,01 s. La durée totale de la simulation est fixée à 0,02 s (figure 5).

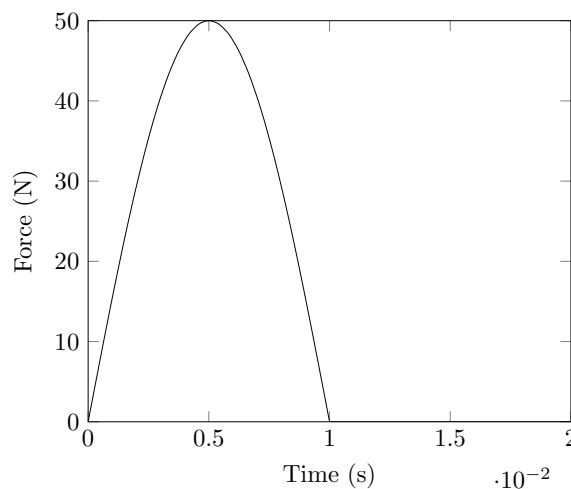


FIGURE 5 – Signal de chargement.

2.4.2 Discrétisation temporelle et paramètres de simulation

Deux simulations sont réalisées pour comparer les méthodes de couplage :

1. **Séquentielle** (section 2.2) : où le couplage s'effectue à chaque pas de temps,
2. **Globale en temps** (section 2.3) : où la boucle de couplage est placée à l'extérieur de la boucle temporelle.

Le calcul dynamique utilise un schéma implicite de Newmark [6] ($\beta = 0.25, \gamma = 0.5$). La convergence du couplage est accélérée par la méthode d'Aitken [1], qui ajuste le facteur de relaxation ω selon :

$$\omega^{i+1} = \omega^i \frac{(r^i - r^{i+1})^T r^i}{\|r^{i+1} - r^i\|_2^2}, \quad p^{i+1} = p^i + \omega^{i+1} r^i.$$

Dans le cas de l'approche globale en temps, les vecteurs r^i et leurs produits scalaires sont définis dans l'espace et le temps, c'est-à-dire qu'ils sont spatio-temporels.

3 Résultats

Une simulation a été réalisée avec 20 pas de temps. La figure 6 compare les performances de convergence des deux approches. Pour la méthode séquentielle (figure 6a), l'erreur relative est tracée à chaque pas de temps en fonction de l'itération et s'exprime comme :

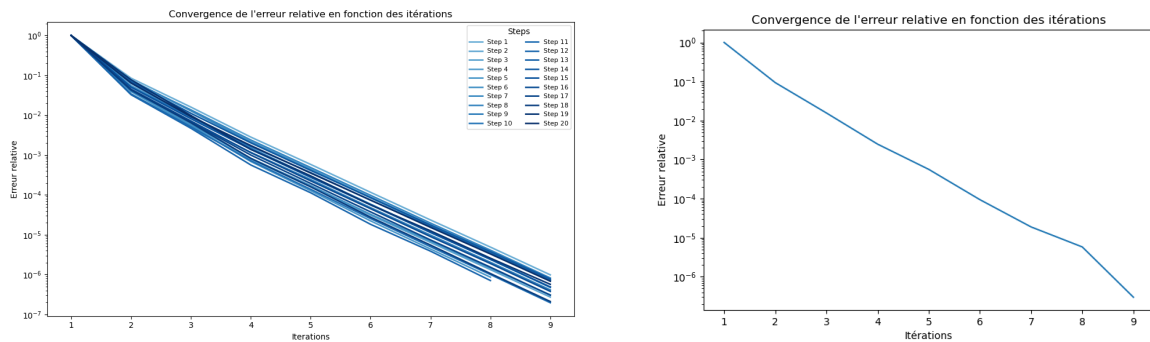
$$\varepsilon^i = \frac{\|r^i\|_2}{\|r^0\|_2}.$$

Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la tolérance fixée à 10^{-6} varie entre 8 et 9 selon le pas de temps considéré.

Dans le cas global en temps (figure 6b), l'erreur relative sur le domaine espace-temps est représentée en fonction de l'itération et s'exprime comme :

$$\varepsilon^i = \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^T \|r_j^i\|_2^2}}{\sqrt{\sum_{j=0}^T \|r_j^0\|_2^2}}.$$

La convergence est atteinte en 9 itérations, pour la même tolérance, avec un temps de calcul de 2.872 s, contre 8.008 s pour la méthode séquentielle, soit une réduction d'environ 64%. Ce gain, inattendu dans la configuration actuelle, fait actuellement l'objet d'une analyse approfondie afin d'en identifier les causes. Bien que chaque itération de la méthode globale en temps soit plus coûteuse, le nombre réduit d'échanges entre domaines global et local constituera un avantage notable pour une mise en œuvre parallèle future.



(a) Méthode séquentielle.

(b) Méthode globale en temps.

FIGURE 6 – Convergence de l'erreur relative avec 20 pas de temps : (a) méthode séquentielle, (b) méthode globale en temps.

Pour un nombre de pas de temps plus élevé (160 pas), les comportements diffèrent. L'approche séquentielle, comme la solution de référence, converge correctement avec une tolérance de 10^{-6} grâce à l'accélération d'Aitken. La méthode globale en temps, en revanche, présente une stagnation de l'erreur autour de 10^{-5} . Malgré cette différence de précision, les déplacements obtenus sont identiques pour les trois méthodes sur ce cas test (figure 7).

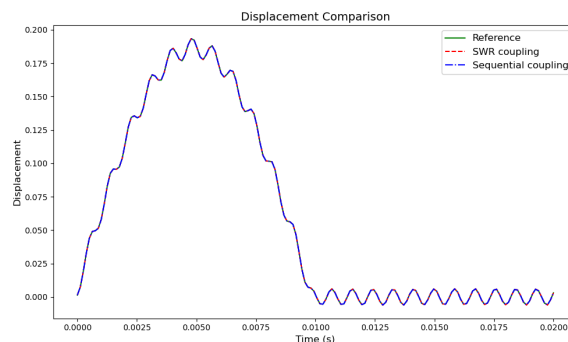


FIGURE 7 – Évolution temporelle du déplacement en un point de l'interface avec 160 pas de temps : référence, méthode séquentielle et méthode globale en temps.

4 Conclusions et Perspectives

Ce travail propose une adaptation de la méthode de relaxation par forme d'onde de Schwarz (SWR) au couplage global/local en dynamique des structures. Contrairement à la méthode séquentielle, qui effectue les échanges d'informations à chaque pas de temps, la méthode proposée opère sur l'ensemble de l'intervalle temporel $[0, T]$, permettant aux sous-domaines de résoudre leurs équations de manière indépendante tout en assurant la continuité mécanique à l'interface Γ .

Les simulations montrent que la méthode globale en temps permet un gain de temps significatif (environ 64% dans le cas à 20 pas de temps), tout en conservant les mêmes déplacements que les autres méthodes. Pour un nombre de pas de temps plus élevé, une stagnation de l'erreur est observée, ce qui fait actuellement l'objet d'études pour en comprendre les causes et identifier les facteurs limitant la convergence.

Ces résultats ouvrent des perspectives pour approfondir l'analyse du comportement de la méthode globale en temps, notamment en présence de méthodes d'accélération, et pour analyser ses limites sur des cas plus complexes. L'extension aux comportements fortement non-linéaires constitue également un axe important pour les applications industrielles.

Références

- [1] A. C. Aitken. *On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. 46, p. 289-305, 1926.
- [2] O. Bettinotti, O. Allix, B. Malherbe, *A coupling strategy for adaptive local refinement in space and time with a fixed global model in explicit dynamics*, Computational Mechanics 53 (4), p. 561–574, 2014.
- [3] M. J. Gander, L. Halpern, F. Nataf. *Optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One Dimensional Wave Equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 41, p. 1643-1681, 2003.
- [4] L. Halpern, J. Szeftel. *Optimized and Quasi-optimal Schwarz Waveform Relaxation for the One Dimensional Schrödinger Equation*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 20, p. 2167-2199, 2010.
- [5] Y. Maday, A. T. Patera. *Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, State-of-the-art surveys on computational mechanics, ASME, p. 71-143, 1989.
- [6] N. M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, vol. 85, p. 67-94, 1959.
- [7] J. D. Whitcomb. *Iterative global/local finite element analysis*, Computers and Structures 40 (4), p. 1027-1031 1991.