

Théorie du transfert radiatif appliquée au contrôle non destructif de cylindres de ciment avec inclusions sphériques de verre

L. de Abreu Correia¹⁻², S. Khazaie², R. Cottureau³, M. Ramaniraka³, C. Gomez¹

¹ Institut de Mathématiques de Marseille Aix-Marseille Université - AMU. christophe.gomez@univ-amu.fr

² Institut de recherche en Genie Civil et Mécanique Nantes Université. Shahram.Khazaie@univ-nantes.fr

³ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique [Marseille] Aix-Marseille Université - AMU, CNRS, Centrale Méditerranée, [de-abre-correa,cottureau,ramaniraka]@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — Cet article présente une analyse comparative entre la théorie du transfert radiatif (TTR) et l'équation des ondes (EO) pour la caractérisation non destructive de cylindres composites ciment-verre. Le matériau étudié est constitué d'une matrice de ciment contenant 40% de billes de verre de 4 mm de diamètre. La TTR, dérivée asymptotiquement à partir de l'EO dans le régime de couplage faible, permet de modéliser le transport de densité d'énergie dans ces milieux hétérogènes. Les solutions de référence sont obtenues par la Méthode des Éléments Spectraux (SEM) avec homogénéisation préalable, tandis que la TTR est résolue par une méthode de Monte-Carlo. Les résultats montrent la capacité de la TTR à reproduire la propagation de l'énergie acoustique dans ce type de milieu fortement diffusif, ouvrant des perspectives pour le contrôle non destructif et l'identification de paramètres.

Mots clés — Transfert radiatif, éléments spectraux, milieux hétérogènes, contrôle non destructif.

1 Introduction

Dans les milieux non bornés, l'équation des ondes (EO) décrit l'évolution du champ de pression $p(t, \mathbf{x})$:

$$\mathcal{L}(p(t, \mathbf{x})) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla p \right) - \frac{1}{\kappa(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

où $\rho(\mathbf{x})$ et $\kappa(\mathbf{x})$ sont respectivement la densité et le module de compressibilité du milieu hétérogène.

Dans les milieux faiblement et rapidement fluctuants (régime de couplage faible), une grande partie de l'énergie est diffusée, rendant impossible une homogénéisation par la EO. L'équation de transfert radiatif (TTR) modélise alors le transport de la densité d'énergie $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \bar{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} a = \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}' - \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}) a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (2)$$

avec \bar{c} la célérité moyenne, σ la section efficace différentielle de diffusion, et Σ la section efficace totale.

En partant d'une EO avec paramètres fluctuants ($\bar{\kappa} + \sqrt{\epsilon} \kappa(\mathbf{x}/\epsilon)$ et $\bar{\rho} + \sqrt{\epsilon} \rho(\mathbf{x}/\epsilon)$), un calcul asymptotique formel permet d'obtenir la TTR, où $\bar{c} = \sqrt{\bar{\kappa}/\bar{\rho}}$:

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\pi \bar{c}^2 \|\mathbf{k}\|^2}{2} \left[\frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2}{\bar{\rho}^2} \tilde{R}_\rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')}{\bar{\kappa} \bar{\rho}} \tilde{R}_{\rho\kappa}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{\tilde{R}_\kappa(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\bar{\kappa}^2} \right] \delta(\bar{c} \|\mathbf{k}\| - \bar{c} \|\mathbf{k}'\|), \quad (3)$$

avec \tilde{R}_ρ , $\tilde{R}_{\rho\kappa}$, et \tilde{R}_κ les densités spectrales des fluctuations aléatoires, et $\Sigma = \int \sigma d\mathbf{k}$.

Initialement développée pour modéliser le transport lumineux dans l'atmosphère [1], la théorie du transfert radiatif s'applique désormais à divers domaines : neutronique [2], éclairage numérique [3], ou modélisation de la coda sismique [4]. Bien que la TTR soit rigoureusement valide uniquement à la limite asymptotique, elle fournit en pratique une approximation raisonnable même pour des valeurs finies du petit paramètre (rapport longueur d'onde/distance). Plusieurs études numériques ont exploré son domaine de validité [5, 6, 7], couvrant différents cas (acoustique/élastique, 2D/3D) et méthodes numériques (différences/éléments finis, spectral) pour de petites fluctuations (maximum de 10%). L'objectif de cet article est d'analyser le TTR pour un cylindre composé d'un mélange de billes de verre dans une matrice de ciment, ainsi que d'effectuer une comparaison avec un modèle d'équation d'onde.

2 Modèle numérique

2.1 SEM

Pour obtenir des solutions de référence de l'équation d'onde (EO), une implémentation parallèle haute performance de la Méthode des Éléments Spectraux (SEM) est utilisée. Cette implémentation, décrite dans [8] et disponible sur ¹, utilise un schéma de Newmark décalé en temps vitesse-contrainte du second ordre [9] pour l'intégration temporelle, des Couches Parfaitement Adaptées (PML) pour absorber les ondes sortantes [10], et un module pour générer des réalisations de champs aléatoires pour les paramètres mécaniques [11]. La SEM, une méthode de la famille des Éléments Finis, repose sur une formulation faible de l'équation (1), utilisant des nœuds de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) pour les polynômes de Lagrange, ces mêmes nœuds et poids GLL pour la quadrature numérique, et des éléments hexaédriques. Cela résulte en une matrice de masse diagonale, rendant l'intégration temporelle explicite très efficace et réduisant le coût calculatoire des produits matrice-vecteurs à chaque pas de temps [12, 13]. Initialement développée pour la dynamique des fluides [14], la SEM a été adaptée aux études sismologiques pour résoudre l'équation d'onde 3D dans des milieux hétérogènes [15, 16, 17, 18]. Des éléments d'analyse et d'estimation d'erreur sont disponibles dans [19].

Le corps d'essai analysé est basé sur un cylindre de *rayon* 5.5 cm et *hauteur* 21 cm, composé de ciment comme matrice et de billes de verre de 4 mm de diamètre, avec une fraction volumique de 40%, produit par la méthodologie décrite en [20, 21]. Les propriétés du ciment sont caractérisées par les vitesses des ondes P et S, ainsi que par sa densité : $v_p = 3950$ m/s, $v_s = 2950$ m/s et $\rho = 2050$ kg/m³. Pour le verre, les paramètres utilisés sont $v_p = 5800$ m/s, $v_s = 3400$ m/s et $\rho = 2450$ kg/m³.

Pour la résolution dans le code d'éléments spectraux, un processus d'homogénéisation (à l'aide du logiciel *HomoFFT*, fourni par Y. Capdeville [22, 23]) a été réalisé au préalable, ce qui évite de devoir mailler explicitement les sphères à l'intérieur du cylindre.

La figure 1 présente le cylindre ainsi que la composante C_{11} du tenseur de comportement homogénéisé. Les capteurs sont placés sur le rayon externe ($r = 5.5$ cm) et espacés de 10 mm en hauteur. Un *tone-burst* de fréquence centrale 250 kHz et composé de 5 cycles a été appliqué afin de générer une onde P.

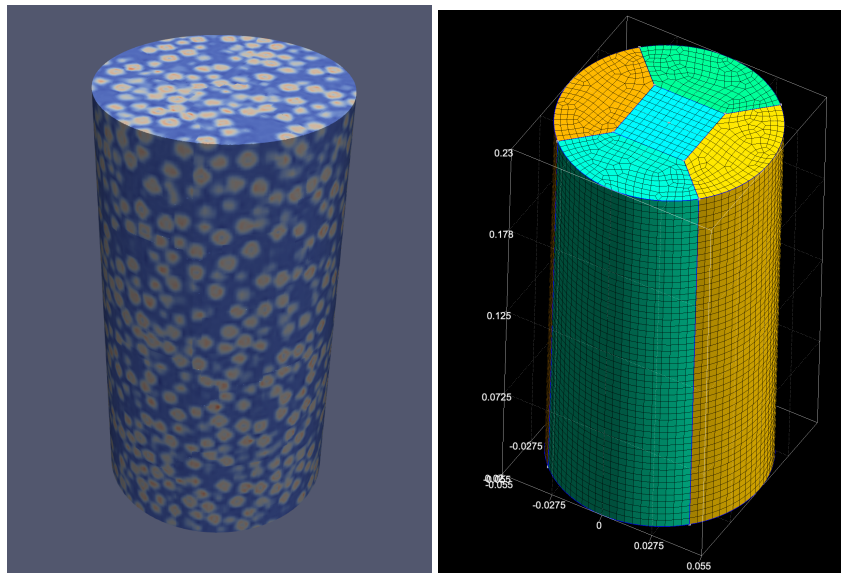


FIGURE 1 – Maillage utilisé pour discrétiser l'échantillon cylindrique et composante C_{11} issue de l'homogénéisation.

1. <https://github.com/sem3d/SEM>

2.2 Transfert Radiatif

La principale difficulté pour obtenir des solutions approchées de l'équation de transfert radiatif (TTR) de l'équation (2) réside dans la dimensionnalité du problème. La solution $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$ est a priori 7-dimensionnelle, ce qui rend les méthodes de discrétisation classiques, comme les Méthodes des Différences Finies et des Éléments Finis, très coûteuses. Des méthodes alternatives existent, comme la Méthode de Boltzmann sur réseau [24]. Cependant, la méthode de Monte-Carlo (MC) [25], utilisée ici, est la plus répandue. Ses principaux atouts sont sa simplicité d'implémentation et sa relative indépendance à la dimensionnalité. La méthode MC consiste à interpréter la quantité à évaluer, ici la densité d'énergie $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$, comme une fonction de densité de probabilité (après normalisation) et son évolution spatio-temporelle (la TTR de l'équation (2)) comme une équation de Fokker-Planck (ou Kolmogorov). Concrètement, cela revient à sélectionner de petits paquets d'énergie dans la distribution initiale et à les propager dans l'espace suivant le vecteur de convection $\bar{c}\hat{\mathbf{k}}$, tout en les soumettant à des événements de diffusion aléatoires dépendant de $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, et à suivre leur position \mathbf{x} et leur vecteur d'onde \mathbf{k} au cours du temps t . Finalement, des histogrammes des paquets en fonction de $(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$ peuvent être construits, censés converger vers $a(t, \mathbf{x}, \mathbf{k})$ lorsque le nombre de paquets discrétisant la distribution initiale augmente. Voir [26] pour les détails théoriques sur la vision probabiliste des équations de transport et la méthode MC. L'implémentation utilisée est disponible², et ce modèle numérique a été conçu pour être identique au modèle présenté dans la Sec. 2.1.

Nous adoptons la structure de corrélation d'un empilement dense de sphères impenetrables de diamètre \underline{d} et de ratio volumique $\underline{\phi}$, telle que développée par Torquato et collaborateurs [27, 28, 29]. Cette fonction, qui dépend uniquement de $\underline{\phi}$ et \underline{d} , satisfait la condition d'impenetrabilité et présente un décroissement oscillant de type cosinus.

En utilisant la représentation de Meyer de la fonction canonique S_n , le modèle de corrélation à deux points peut s'écrire comme :

$$S_2(r) = 1 - \underline{\phi}V_2(r) + \underline{\phi}^2 \mathcal{F}^{-1} \left[\tilde{m}(k)^2 \frac{\tilde{c}(k)}{1 - \underline{\phi}\tilde{c}(k)} \right], \quad (4)$$

où $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ désigne la transformée de Fourier inverse et $V_2(r)$ le volume normalisé de l'union de deux sphères séparées de r :

$$V_2(r < \underline{d}_w) = \frac{4\pi}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{2r}{\underline{d}_w} - \frac{1}{16} \left(\frac{2r}{\underline{d}_w} \right)^3 \right), \quad (5)$$

et $V_2(r > \underline{d}_w) = 8\pi/3$ sinon.

La transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\tilde{m}(k)$ vaut :

$$\tilde{m}(k) = \frac{4\pi}{k} \left(\frac{\sin k}{k^2} - \frac{\cos k}{k} \right), \quad (6)$$

et la fonction de corrélation directe $\tilde{c}(k)$, obtenue via l'approximation de Percus–Yevick corrigée par Verlet–Weis [30, 31], est donnée par :

$$\tilde{c}(k) = -\frac{4\pi}{k^3} \left\{ \lambda_1 [\sin(2k) - 2k \cos(2k)] + \frac{3\eta_w \lambda_2}{k} [4k \sin(2k) + (2 - 4k^2) \cos(2k) - 2] \right. \\ \left. + \frac{\eta_w \lambda_1}{2k^3} [(-2k^4 + 6k^2 - 3) \cos(2k) + (4k^3 - 6k) \sin(2k) + 3] \right\}, \quad (7)$$

avec η_w , η , λ_1 , λ_2 et \underline{d}_w définis comme dans les travaux originaux.

Le modèle de corrélation recherché, $\mathcal{R}(r)$, lié à la fonction $S_2(r)$, s'obtient alors par :

$$\mathcal{R}(r) = \frac{S_2(r) - (1 - \eta_w)^2}{\eta_w(1 - \eta_w)}. \quad (8)$$

Cette normalisation élimine la discontinuité en $r = 0$, inhérente aux milieux biphasés. Dans l'équation (3), pour un coefficient de variation de 7.5 % pour les variables \tilde{R}_κ et \tilde{R}_ρ et un coefficient de 0 pour la corrélation croisée $\tilde{R}_{\kappa\rho}$, on peut observer la Figure 2 à gauche. La condition initiale normalisée est présentée dans la Figure 2 à droite.

2. <https://github.com/cottureau/RadiativeTransferMonteCarlo>

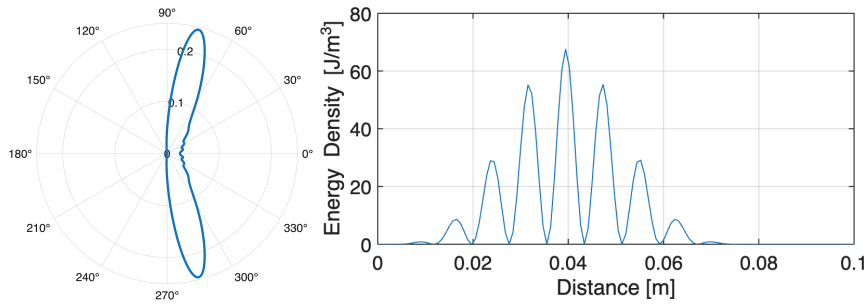


FIGURE 2 – Section efficace de diffusion et condition initiale utilisées dans le modèle RTT.

3 Comparação entre SEM e RTT

La Figure 3 montre la densité d'énergie en échelle dB pour RTT et EO. Le temps est présenté sur l'axe des abscisses et la distance z du cylindre sur l'axe des ordonnées. Podemos ver na esquerda o resultado do modelo EO e a direita o modelo em RTT.

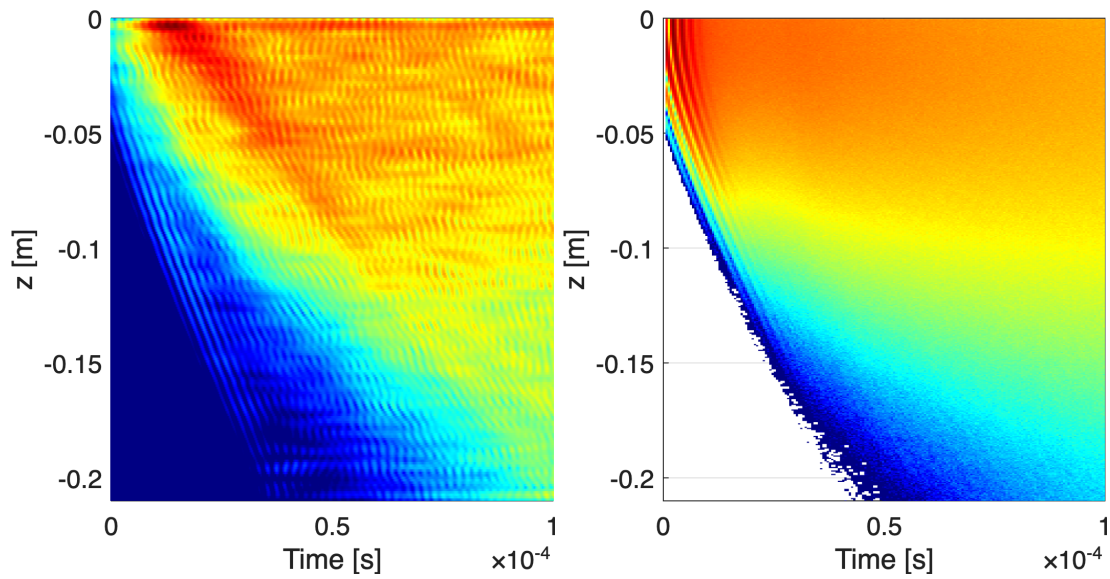


FIGURE 3 – Densité d'énergie dans l'espace et le temps

4 Conclusion et travaux futurs

Cette étude a permis de comparer deux approches numériques pour la modélisation de la propagation d'ondes acoustiques dans un cylindre composite ciment-verre : la résolution directe de l'équation des ondes par la Méthode des Éléments Spectraux et la théorie du transfert radiatif résolue par Monte-Carlo. Les résultats présentés dans la Figure 3 démontrent que la TTR parvient à capturer les caractéristiques principales de la propagation de l'énergie dans ce milieu fortement hétérogène, malgré les hypothèses asymptotiques sur lesquelles elle repose.

La TTR présente plusieurs avantages significatifs pour l'application au contrôle non destructif : elle permet de traiter des milieux avec des fluctuations importantes (40% de fraction volumique dans notre cas) tout en conservant un coût calculatoire raisonnable grâce à la méthode de Monte-Carlo. De plus, elle fournit directement une description de la densité d'énergie, grandeur pertinente pour l'interprétation des signaux expérimentaux en présence de forte diffusion.

Plusieurs perspectives se dégagent de ce travail. En premier lieu, il est nécessaire de résoudre le problème inverse pour l'identification des coefficients de variation correspondant aux paramètres du matériau étudié, ce qui permettrait une validation plus rigoureuse du modèle TTR. Ensuite, une comparaison avec la densité d'énergie réelle issue de l'EO, plutôt qu'avec l'estimateur p^2 utilisé actuellement, améliorerait la pertinence de la validation. Enfin, l'extension de cette approche à des géométries plus complexes

et à des configurations d'essais variées constitue une étape importante pour l'application industrielle de la méthode au contrôle non destructif des matériaux composites et bétons.

Remerciement

Ce travail a bénéficié du soutien du gouvernement français dans le cadre du plan d'investissement France 2030, de l'Initiative d'Excellence d'Aix-Marseille Université – A*MIDEX, à travers le projet REALISE, portant le numéro AMX-22-RE-AB-057. Les auteurs remercient l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) pour son soutien via le financement portant le numéro ANR-24-CE46-4528 (projet LOREAL-B). Le Centre de Calcul Intensif d'Aix-Marseille et le Groupement Ligérien pour le Calcul Intensif Distribué (GLiCID) sont remerciés pour l'accès à leurs ressources de calcul haute performance. Les auteurs adressent leurs chaleureux remerciements à Michaël Darche et Yann Capdeville pour l'accès et l'aide apportée avec le logiciel d'homogénéisation HomoFFT.

Références

- [1] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Oxford University Press, 1950.
- [2] E. W. Larsen and J. B. Keller. Asymptotic solution of neutron transport problems for small mean free paths. *J. Math. Phys.*, 15 :75–81, 1974.
- [3] A. Keller, L. Fascione, M. Fajardo, I. Georgiev, P. Christensen, J. Hanika, C. Eisenacher, and G. Nichols. The path tracing revolution in the movie industry. *ACM SIGGRAPH 2015 Courses (SIGGRAPH '15)*, 2015.
- [4] L. Margerin and G. Nolet. Multiple scattering of high-frequency seismic waves in the deep Earth : modeling and numerical examples. *J. Geophys. Res.*, 108(B5) :2234–2251, 2003.
- [5] G. Bal and O. Pinaud. Accuracy of transport models for waves in random media. *Wave Motion*, 43 :561–578, 2006.
- [6] K. Emoto and H. Sato. Statistical characteristics of scattered waves in three-dimensional random media : comparison of the finite difference simulation and statistical methods. *Geophys. J. Int.*, 215 :585–599, 2018.
- [7] M. Celorio, E. Chaljub, L. Margerin, and L. Stehly. Propagation of 2-D SH waves in random media : insights from *ab initio* numerical simulations and transport theory. *Frontiers Earth Sci.*, 10 :1–22, 2022.
- [8] S. Touhami, F. Gatti, F. Lopez-Caballero, R. Cottureau, L. Aubry, and D. Clouteau. SEM3D : a 3D high-fidelity numerical earthquake simulator for broadband (0–10 Hz) seismic response prediction at a regional scale. *Geosciences*, 12(3) :1–27, 2022.
- [9] J.C. Simo, N. Tarnow, and K.K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1) :63–116, 1992.
- [10] G. Festa and J.-P. Vilotte. The Newmark scheme as velocity-stress time-staggering : an efficient PML implementation for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophys. J. Int.*, 161 :789–812, 2005.
- [11] L. de Carvalho Paludo, V. Bouvier, and R. Cottureau. Scalable parallel scheme for sampling of Gaussian random fields over large domains. *Int. J. Numer. Meth. Engr.*, 117(8) :845–859, 2019.
- [12] M. O. Deville, P. F. Fischer, and E. H. Mund. *High-order methods for incompressible fluid flows*, volume 2 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] S. Chaillat, R. Cottureau, and R. Sevilla. A high-order discontinuous Galerkin Method using a mixture of Gauss-Legendre and Gauss-Lobatto quadratures for improved efficiency. <https://hal.science/hal-03695573/>, 2022.
- [14] Anthony T Patera. A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3) :468–488, 1984.
- [15] Dimitri Komatitsch and Jean-Pierre Vilotte. The spectral element method : An efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2) :368–392, 04 1998.
- [16] Géza Seriani. 3-d large-scale wave propagation modeling by spectral element method on cray t3e multi-processor. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 164(1) :235–247, 1998. Exterior Problems of Wave Propagation.
- [17] Dimitri Komatitsch and Jeroen Tromp. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139(3) :806–822, 12 1999.

- [18] S. Khazaie, R. Cottureau, and D. Clouteau. Numerical observation of the equipartition regime in a 3D randomly heterogeneous elastic medium, and discussion on the limiting parameters. *Comp*, 102 :56–67, 2017.
- [19] Gary C Cohen et al. *Higher-order numerical methods for transient wave equations*, volume 5. Springer, 2002.
- [20] Robin Valmalette, Cédric Bellis, Christian Hochard, and Noël Lahellec. Robust identification of carbon fibers and polymer matrix properties in composites from simple tensile tests. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 202 :109452, 2026.
- [21] Elias Ghossein and Martin Lévesque. A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 49(11-12) :1387–1398, 2012.
- [22] Y. Capdeville and J.-J. Marigo. Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophys. J. Int.*, 170(2) :823–838, 2007.
- [23] Y. Capdeville, L. Guillot, and J.-J. Marigo. 2D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-SV waves. *Geophys. J. Int.*, 182(2) :903–922, 2010.
- [24] R. Ruysen, R. Cottureau, and P. Boivin. A staggered Lattice Boltzmann Method for the Radiative Transfer Equation. *Comp. & Fluids*, 290(106555) :1–16, 2025.
- [25] C. Gomez and O. Pinaud. Monte Carlo methods for radiative transfer with singular kernels. *SIAM J. Sci. Comp.*, 40(3) :A1714–A1741, 2018.
- [26] B. Lapeyre, E. Pardoux, and R. Sentis. *Introduction to Monte-Carlo methods for transport and diffusion equations*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics. Oxford University Press, 2003.
- [27] S. Torquato and G. Stell. Microstructure of two-phase random media. V. the n-point matrix probability functions for impenetrable spheres. *J. Comp. Phys.*, 82 :980–987, 1985.
- [28] S. Torquato. *Random heterogeneous materials. Microstructure and macroscopic properties*. Springer, 2001.
- [29] J. Quintanilla. Microstructure functions for random media with impenetrable particles. *Phys. Rev. E*, 60 :5788–5794, 1999.
- [30] J. K. Percus and G. J. Yevick. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates. *Phys. Rev.*, 110(1) :1–13, 1958.
- [31] L. Verlet and J.-J. Weis. Equilibrium theory of simple liquids. *Phys. Rev. A*, 5(2) :939–952, 1972.