

Résolution Parallèle pour la Corrélation d'Image Volumique Numérique Global avec Régularisation Mécanique

R. Hastrate¹, L. Person¹, J-C. Passieux¹, P. Jolivet², P. Oumaziz¹, R. Bouclier^{1,3,4}

¹ Institut Clément Ader, Université de Toulouse, INSA/ISAE/Mines Albi/UPS, CNRS, Toulouse, France

² Laboratoire d'informatique de Paris 6 (LIP6), CNRS/Sorbonne Université Paris, France

³ Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), Université de Toulouse, CNRS/UT1/UT2/UT3/INSA, Toulouse, France

⁴ Institut Universitaire de France (IUF)

Résumé — Le développement des méthodes d'imagerie permettent, via la corrélation d'images volumiques numérique (DVC), de mesurer des champs de déplacement dans la matière pendant des expériences. L'application aux matériaux cellulaires est cependant contrainte par le manque de contraste dans la matière et la complexité géométrique. L'ajout d'une régularisation mécanique permet d'améliorer la résolution de mesure. Il est aussi nécessaire de répondre aux besoins importants en calcul et en mémoire, ce qui est réalisé dans ce travail en développant une résolution parallèle dédiée.

Mots clés — DVC, HPC, Régularisation, Calcul parallèle.

1 Introduction

Les matériaux cellulaires peuvent offrir des propriétés intéressantes pour des structures multifonctions [1, 2]. Leur modélisation et la prédiction de leur comportement est cependant complexe par la coexistence de plusieurs échelles dans le matériau [3]. Cette difficulté est exacerbée lorsque la structure du matériau n'est pas un simple motif répété dans l'espace, comme pour les mousses (ou la structure est aléatoire) ou plus généralement à cause des défauts de fabrication [4].

L'étude de ces matériaux via des méthodes d'imagerie, comme la tomographie par rayons X, offre de grands avantages pour leur caractérisation [5]. En plus de pouvoir observer l'architecture du matériau, la réalisation d'expérience *in-situ* permet, via la corrélation d'images volumiques (Digital Volume Correlation, DVC) [6], de mesurer des champs de déplacement complet (dans la matière) lors d'un essai mécanique.

La résolution spatiale des déplacements mesurés via DVC est corrélée à l'échelle des variations de contraste des images utilisées. Pour les matériaux cellulaires, la texture est créée par l'architecture du matériau, à défaut de contraste dans la matière elle-même. Les déplacements sont alors mesurables seulement à une échelle au-dessus de l'échelle d'une cellule. Lorsque le déplacement est cherché sur un maillage éléments finis mésoscopique, la taille des éléments est alors choisie à la taille des cellules, l'architecture étant immergée dans le maillage [7]. Afin de mesurer les déplacements dans les cellules, un maillage d'éléments finis est construit via les images, sur lequel le déplacement est obtenu en minimisant la fonction coût défini par la DVC et auquel est ajouté un terme de régularisation mécanique [7]. Le poids associé à la régularisation (dans le problème de minimisation) peut être choisi via une longueur caractéristique [8, 9].

La combinaison d'images volumiques de grandes tailles et de la complexité géométrique des matériaux cellulaires créent des besoins en moyens de calcul importants. Pour y répondre, la minimisation du problème de corrélation est parallélisée. La régularisation via le résidu d'équilibre impose la résolution de système linéaire avec une connectivité étendue comparé aux opérateurs éléments finis [10], complexifiant l'implémentation parallèle. Pour cette raison, une régularisation alternative est introduite. La méthode est testée sur les images d'un essai sur une mousse polyuréthane.

2 Méthode

La méthode de la corrélation d'images se base sur l'hypothèse de conservation des niveaux de gris. Avec $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'image volumique de référence, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'image volumique déformée et $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de déplacement, cette hypothèse s'écrit

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})).$$

Pour la DVC non régularisée, le déplacement est trouvé en minimisant le résidu associé aux images

$$\mathcal{T}_{\text{DIC}}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n_{\text{vx}}} |f(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_i + \mathbf{u}(\mathbf{x}_i))|^2, \quad (1)$$

avec n_{vx} le nombre de voxel et $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ la position du voxel i . Le champ de déplacement \mathbf{u} est discrétisé sur un maillage d'éléments finis, on a

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x})\underline{\mathbf{u}}$$

avec $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de degrés de liberté, n le nombre de degrés de liberté et $\mathbb{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times n}$ l'ensemble des fonctions de forme associées. Le résidu d'images est minimisé par rapport $\underline{\mathbf{u}}$ [11]. On écrira par la suite $\mathcal{T}_{\text{DIC}}(\underline{\mathbf{u}})$ sans expliciter le passage de $\underline{\mathbf{u}}$ à \mathbf{u} .

Dans des travaux précédents, la régularisation du problème via une fonctionnelle construite avec la norme des résidus d'équilibre (discrétisées) a été proposée [8, 9]. La fonctionnelle, dans sa forme la plus simple, s'écrit

$$\mathcal{T}_{\text{reg}}(\underline{\mathbf{u}}) = \|\mathbb{D}(\mathbb{K}\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{f}})\|^2 \quad (2)$$

avec $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de rigidité, $\underline{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de force nodal représentant un éventuel effort volumique et \mathbb{D} la matrice rectangulaire extrayant les équations d'équilibre complètement connues, en excluant notamment celles qui seraient liées à des nœuds Dirichlet. La hessienne de cette fonctionnelle est la matrice $\mathbb{K}^\top \mathbb{D}^\top \mathbb{D} \mathbb{K}$, qui possède une connectivité plus étendue que la connectivité de \mathbb{K} (et globalement plus étendue que la connectivité d'opérateur éléments finis) ce qui augmente la complexité d'une résolution parallèle [10].

La régularisation mécanique introduite dans ce travail est construite à partir d'une modélisation élastique en ajoutant, au résidu d'image minimisé, la fonctionnelle d'énergie associée à la formulation faible d'un problème d'élasticité

$$\mathcal{T}_{\text{reg}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}^\top \mathbb{K} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^\top (\underline{\mathbf{f}} - \mathbb{A}^\top \underline{\boldsymbol{\lambda}}) \quad (3)$$

où le produit $-\mathbb{A}^\top \underline{\boldsymbol{\lambda}}$ est la distribution d'efforts liée aux conditions limites. Le modèle sur lequel est basée la régularisation est un problème élastique utilisant le déplacement mesuré $\underline{\mathbf{u}}$ comme conditions limites de Dirichlet, et s'écrit

$$\begin{cases} \mathbb{K}\underline{\mathbf{v}} + \mathbb{A}^\top \underline{\boldsymbol{\lambda}} & = \underline{\mathbf{f}} \\ \mathbb{A}\underline{\mathbf{v}} & = \mathbb{A}\underline{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (4)$$

avec $\underline{\mathbf{v}}$ le déplacement simulé, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n_{\text{bc}} \times n}$ la matrice extrayant de $\underline{\mathbf{u}}$ les n_{bc} degrés de liberté Dirichlet et $\underline{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{bc}}}$ le vecteur de multiplicateur de Lagrange représentant les efforts associés.

Pour un champ de déplacement défini par une longueur caractéristique ℓ_w , par exemple, de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(k_w \mathbf{x})$ (avec $k_w = \ell_w^{-1}$), on peut montrer que la fonctionnelle de régularisation s'approxime par une fonction homogène de degré 2, i.e.

$$\mathcal{T}_{\text{reg}}(\mathbf{a}(k_w \mathbf{x})) \simeq k_w^2 \mathcal{T}_{\text{reg}}(\mathbf{a}(\mathbf{x})).$$

Pour la régularisation utilisant le résidu d'équilibre, la fonctionnelle peut s'approximer par une fonction homogène à k_w à un degré 4 [8]. Cette propriété permet de choisir le poids associé à la régularisation en fonction d'une longueur ℓ_{reg} . Avec $\underline{\mathbf{u}}_w$ un champ de déplacement d'onde plane de longueur caractéristique ℓ_w , le poids associé à la régularisation est

$$w = \left(\frac{\ell_{\text{reg}}}{\ell_w} \right)^2 \left(\frac{\underline{\mathbf{u}}_w^\top \mathbb{M}_{\text{DIC}} \underline{\mathbf{u}}_w}{\underline{\mathbf{u}}_w^\top \mathbb{K} \underline{\mathbf{u}}_w} \right), \quad (5)$$

permettant que pour les déplacements de longueur caractéristique plus grande que ℓ_{reg} le poids de la régularisation soit négligeable devant le poids du résidu d'image. La régularisation agissant alors comme un filtre passe-bas, réduisant les effets des incertitudes.

Le problème d'optimisation à résoudre est la minimisation de la somme de (2) et (3) (pondéré par w (5)). Le lien entre $\underline{\lambda}$ et $\underline{\mathbf{u}}$ est imposé en ajoutant le système d'équation (4) comme contrainte. Le problème s'écrit

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\lambda}} \quad & \mathcal{T}_{\text{DIC}}(\underline{\mathbf{u}}) + w \mathcal{T}_{\text{reg}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\lambda}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbb{K}\underline{\mathbf{v}} + \mathbb{A}^\top \underline{\lambda} = \underline{\mathbf{f}} \\ \mathbb{A}\underline{\mathbf{v}} = \mathbb{A}\underline{\mathbf{u}} \end{cases} \end{aligned}$$

Les quantités $\underline{\mathbf{v}}$ et $\underline{\lambda}$ ne dépendent que des déplacements aux nœuds Dirichlet. Pour simplifier le problème de minimisation, ces quantités ne sont calculées qu'une seule fois après l'initialisation du champ de déplacement (détaillé plus bas) et considérées constantes par la suite. Les tests réalisés en mettant à jour $\underline{\lambda}$ confirment empiriquement que cette simplification est sans effet significatif sur le déplacement $\underline{\mathbf{u}}$.

Le problème d'optimisation simplifié, sur $\underline{\mathbf{u}}$, est résolu avec l'algorithme de Gauss-Newton, pour lequel le système à résoudre pour corriger la solution s'écrit

$$(\mathbb{M}_{\text{DIC}} + w \mathbb{K}) \underline{\delta \mathbf{u}} = \underline{\mathbf{b}}_{\text{dic}}(\underline{\mathbf{u}}) + w \left(\underline{\mathbf{f}} - \mathbb{K}\underline{\mathbf{u}} - \mathbb{A}^\top \underline{\lambda} \right).$$

Le domaine Ω et les images volumiques sont partitionnés à l'aide une grille cartésienne, avec les éléments du maillage sont repartis dans les sous-domaines. Chaque sous-domaine (et son maillage associé) est assigné à un processus. L'équation (2) est résolue de manière globale avec un solveur itératif parallèle via la bibliothèque logiciel PETSc (Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation) [12].

La solution est initialisée en résolvant le problème de minimisation indépendamment sur chacun sous-domaines. Les déplacements étant définis par les images, qui est une information locale, cette initialisation est très proche de la solution, sauf pour les nœuds aux frontières des sous-domaines où la résolution globale est nécessaire pour assurer la continuité [10].

3 Résultats

La méthode proposée est appliquée sur les reconstructions tomographiques d'une expérience de compression sur un cylindre de mousse polyuréthane (de diamètre 9mm et de hauteur 10mm). Les volumes utilisés sont de dimension $827 \times 757 \times 761$, avec des voxels de taille $13.34 \mu\text{m}$. Le maillage, présenté en figure 1, comporte 2,976 millions de nœuds et 8.928 millions d'éléments. La taille moyenne des éléments est de 2.6 voxels. L'image déformée g utilisée pour tester la méthode a une déformation moyenne de 3.4%. Dans des travaux précédents, l'analyse de cet essai, via maillage de la structure et DVC régularisée, a permis de mesurer la cinématique complexe du matériau présentant du flambement à l'échelle des travées [7]. Cependant l'analyse était limitée à une sous-partie du volume total, la parallélisation du problème permet de traiter le volume entièrement avec la même résolution de mesure.

La figure 2 montre le facteur d'accélération mesuré en fonction du nombre de processeurs (chaque processeur étant lié à un sous-domaine). La résolution sans parallélisation prend 34 minutes et 25 secondes, avec 32 processeurs le temps est réduit à 1 minute et 20 secondes. Une régression linéaire sur les données trouve comme facteur de proportionnalité entre accélération et nombre de processeurs 0.96 (avec $R^2 = 0.956$).

4 Conclusion

La parallélisation de la résolution du problème de corrélation d'images régularisée, pour des volumes issues de tomographie et de grands maillages, est implémenté. La régularisation choisie est établie à partir la formulation en énergie de la formulation faible d'un problème d'élasticité. L'accélération obtenue est linéaire sur la plage testée, permettant une large réduction du temps de calcul.

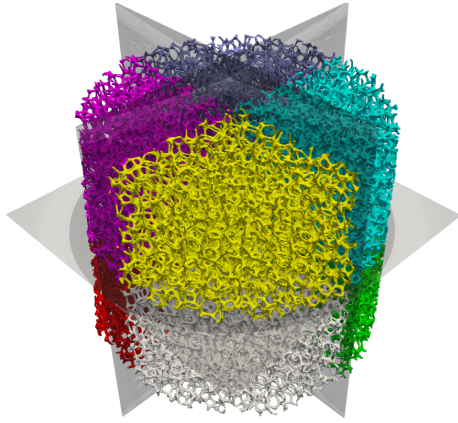


FIGURE 1 – Maillage EF partitionné

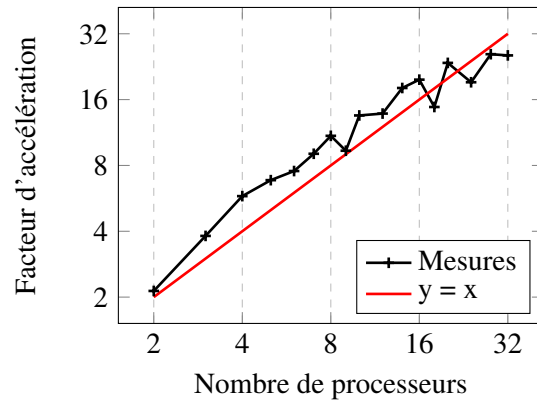


FIGURE 2 – Accélération mesurée en fonction du nombre de processeurs utilisés

Références

- [1] Mike Ashby. Designing architected materials. *Scripta Materialia*, 68(1) :4–7, January 2013.
- [2] Y. Brechet and J.D. Embury. Architected materials : Expanding materials space. *Scripta Materialia*, 68(1) :1–3, January 2013.
- [3] Julia R. Greer and Vikram S. Deshpande. Three-dimensional architected materials and structures : Design, fabrication, and mechanical behavior. *MRS Bulletin*, 44(10) :750–757, October 2019.
- [4] M. Dallago, B. Winiarski, F. Zanini, S. Carmignato, and M. Benedetti. On the effect of geometrical imperfections and defects on the fatigue strength of cellular lattice structures additively manufactured via Selective Laser Melting. *International Journal of Fatigue*, 124 :348–360, July 2019.
- [5] E Maire. X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials. Related finite element modeling problems. *Composites Science and Technology*, 63(16) :2431–2443, December 2003.
- [6] A. Buljac, C. Jailin, A. Mendoza, J. Neggers, T. Taillandier-Thomas, A. Bouterf, B. Smaniotto, F. Hild, and S. Roux. Digital Volume Correlation : Review of Progress and Challenges. *Experimental Mechanics*, 58(5) :661–708, June 2018.
- [7] Ali Rouwane, Pascal Doumalin, Robin Bouclier, Jean-Charles Passieux, and Jean-Noël Périé. Architecture-Driven Digital Volume Correlation : application to the analysis of in-situ crushing of a polyurethane foam. *Experimental Mechanics*, 63(5) :897, 2023.
- [8] H. Leclerc, J.-N. Périé, Stéphane Roux, and François Hild. Voxel-Scale Digital Volume Correlation. *Experimental Mechanics*, 51(4) :479–490, April 2011.
- [9] Arturo Mendoza, Jan Neggers, François Hild, and Stéphane Roux. Complete Mechanical Regularization Applied to Digital Image and Volume Correlation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355 :27–43, October 2019. Publisher : Elsevier.
- [10] Robin Bouclier and Jean-Charles Passieux. A domain coupling method for finite element digital image correlation with mechanical regularization : Application to multiscale measurements and parallel computing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(2) :123–143, 2017.
- [11] G. Besnard, F. Hild, and S. Roux. “finite-element” displacement fields analysis from digital images : Application to portevin–le châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6) :789–803, Dec 2006.
- [12] Lisandro D. Dalcin, Rodrigo R. Paz, Pablo A. Kler, and Alejandro Cosimo. Parallel distributed computing using python. *Advances in Water Resources*, 34(9) :1124 – 1139, 2011. New Computational Methods and Software Tools.