

# Homogénéisation récursive numérique de VERs de propergols employant le calcul parallèle par décomposition de domaine

M. Aprili<sup>1,2</sup>, J. Besson<sup>1</sup>, C. Bovet<sup>1,2</sup>, O. Voreux<sup>2</sup>, A. Ask<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centre des Matériaux, Mines Paris, CNRS UMR 7633

<sup>2</sup> DMAS, ONERA, Université Paris-Saclay, 92320, Châtillon, France

---

**Résumé** — Nous présentons l’homogénéisation numérique d’un propergol. Ce matériau composite est fortement multi-échelle et montre un comportement hyperélastique. Le comportement des différentes phases caractérisé par des essais expérimentaux est détaillé. Afin de faciliter la modélisation la plus fine possible du matériau une homogénéisation récursive est utilisée. Des Volumes Élémentaires Représentatifs (VER) sont modélisés et simulés dans le cadre des petites perturbations donnant des paramètres du comportement homogénéisé élastique linéaire du propergol qui sont comparés à des schémas d’homogénéisation analytique. Une ouverture est faite sur les grandes déformations.

**Mots clés** — Propergols, homogénéisation numérique, homogénéisation récursive, grandes déformations, multi-échelle, matériau composite, calcul parallèle.

---

## 1 Introduction

Les propergols sont des matériaux énergétiques utilisés dans les lanceurs de fusée ou de missiles. Ces matériaux sont composés de charges, fournissant l’apport énergétique, enrobées d’un liant élastomère. Pour maximiser le rendement énergie/poids, un fort taux de charge est recherché. Le cycle de vie du lanceur de sa fabrication à sa mise en service peut être long. Les sollicitations mécaniques subies lors des différentes phases (démoulage, stockage, mission de vol, lancement) peuvent conduire à un endommagement du matériau et altérer le fonctionnement nominal du lanceur. Ce travail se concentre sur la phase de stockage du lanceur. Avant de prendre en compte l’endommagement, l’objectif de ce travail est de comprendre le comportement mécanique du matériau sous des sollicitations quasi-statiques (correspondant à la phase de stockage). Cette compréhension suit une approche micromécanique : une étude par modélisation et simulation numérique de Volumes Élémentaires Représentatifs (VERs) en 3D de propergols est faite, permettant ainsi d’obtenir un comportement mécanique homogénéisé du matériau exploitable à l’échelle macroscopique.

La modélisation et la simulation de propergols présentent de nombreux défis. La description fine du comportement doit tenir compte du caractère fortement multi-échelle induit par la distribution de taille des charges (allant de quelques  $\mu\text{m}$  à plusieurs centaines de  $\mu\text{m}$ ). Le maillage de ces VERs sont de grandes tailles : 5 M d’éléments tétraédriques et 7 M de noeuds ; qui conduisent à des problèmes EF avec  $\approx 22,5\text{M}$  *DOFs* (*degrés de liberté*). Les travaux présents dans la littérature simplifient souvent les VERs : la fraction volumique reste celle d’un propergol réel mais le nombre de tailles de charges et le ratio entre les taille de charges sont fortement restreints. Cette simplification permet de réduire la taille des simulations mais perd en représentativité. Par exemple, de Francqueville a modélisé des VERs de 128 charges simulant au maximum des maillages de 2 M d’éléments [1]. Liu [2] a également modélisé des VERs de propergols comportant 14 charges et il n’a pas précisé la taille des maillages, mais fait partie avec de Francqueville des peu présentant des résultats sur des VERs 3D. Seul Jiaxiang [3] présente des résultats de VERs 3D de plus de 10M d’éléments issus de calculs HPC (1000 coeurs).

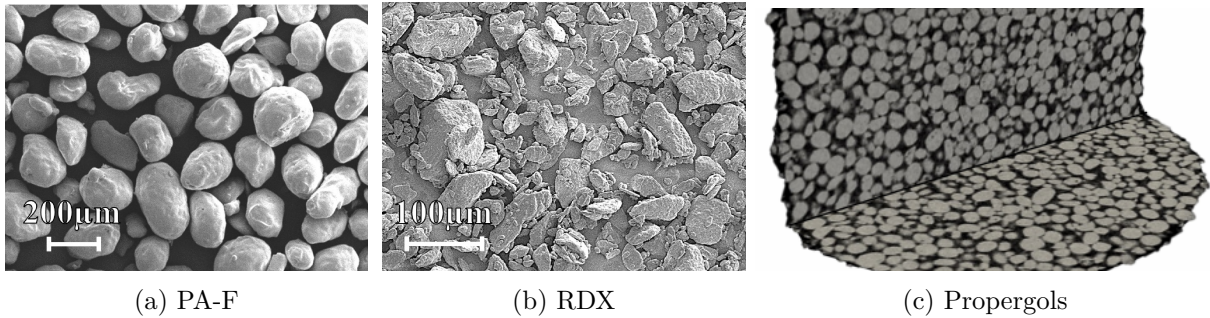


FIGURE 1 – Observations au microscope électronique à balayage (MEB) [8]

Afin de limiter la taille des VERs, il est possible de suivre une approche récursive qui consiste à homogénéiser le comportement du matériau en plusieurs étapes : le VER est réparti en plusieurs échelles, les échelles supérieures utilisent l’homogénéisation faite aux échelles inférieures. Cette approche a déjà été appliquée dans le cadre des composites fortement chargés [4] et sera détaillée plus amplement dans la section 3.1.

De plus les propergols sont des matériaux fortement hétérogènes : le ratio entre les modules d’Young des charges et de la matrice est d’environ  $10^5$ , ce qui amène un mauvais conditionnement des systèmes éléments finis. Le comportement hyperélastique quasi-incompressible du liant invalide l’hypothèse des petites perturbations, et nécessite donc une formulation d’éléments finis mixtes en déplacement, pression et variation de volume dans un formalisme grandes déformations (<http://www.zset-software.com/>). De Francqueville[1] et Liu [2] donnent tous deux des résultats de simulations microscopiques de propergols avec une loi de comportement hyperélastique pour la matrice.

L’approche micromécanique permet d’obtenir un comportement homogénéisé du matériau. Classiquement une loi hyperélastique Néo-Hookéenne est utilisée pour la loi de comportement des propergols due à sa simplicité. Jung et Youn [5], remarquant des effets de vitesse sur les essais de propergols, prennent en compte ce caractère visqueux par un modèle visco-hyperélastique de Simo [6] qui associe au modèle hyperélastique une modélisation visqueuse par intégrale héréditaire. Gouhier a récemment proposé un modèle visco-hyperélastique fondé sur une décomposition du gradient de la transformation en une partie visqueuse et une partie élastique[7]. Le présent travail n’intègre pas de modélisation visqueuse mais le caractère visqueux sera pris en compte dans l’analyse des résultats.

Ce travail vise à mieux comprendre le comportement mécanique des propergols sous chargement quasi-statique par une approche micromécanique. Le but est d’améliorer la représentativité des volumes élémentaires modélisés et simulés. Ce travail s’appuie sur des outils numériques à l’état de l’art pour les solveurs HPC et la génération des maillages. L’endommagement est hors du cadre présenté dans ce travail et fera l’objet de futures recherches.

Ce papier se focalise sur l’homogénéisation récursive sans endommagement et est organisé comme suit : d’abord nous présentons le matériau d’étude, l’homogénéisation récursive sera détaillée ainsi que son application aux propergols dans le cadre élastique linéaire, puis nous aborderons les perspectives pour la modélisation et simulation dans un formalisme grandes déformations.

## 2 Présentation du propergol étudié

### 2.1 Composition du propergol

L’azorgol expérimental étudié contient 2 types de charge dans un liant PAG : le perchlorate d’ammonium fin (PA-F) et l’hexogène (RDX). Le PA-F (figure 1a) a une forme ellipsoïdale et des surfaces lisses, tandis que le RDX (figure 1b) est irrégulier, facetté et rugueux. Les proportions de chaque composant et la granulométrie des charges sont rassemblées dans le tableau 1.

TABLE 1 – Fraction volumique et distribution de taille de charges du propergol

Composant	PAG	RDX	PA-F
Fraction volumique (%)	46	17	37
Distribution de taille ( $\mu\text{m}$ )	/	7-266	0,8-39

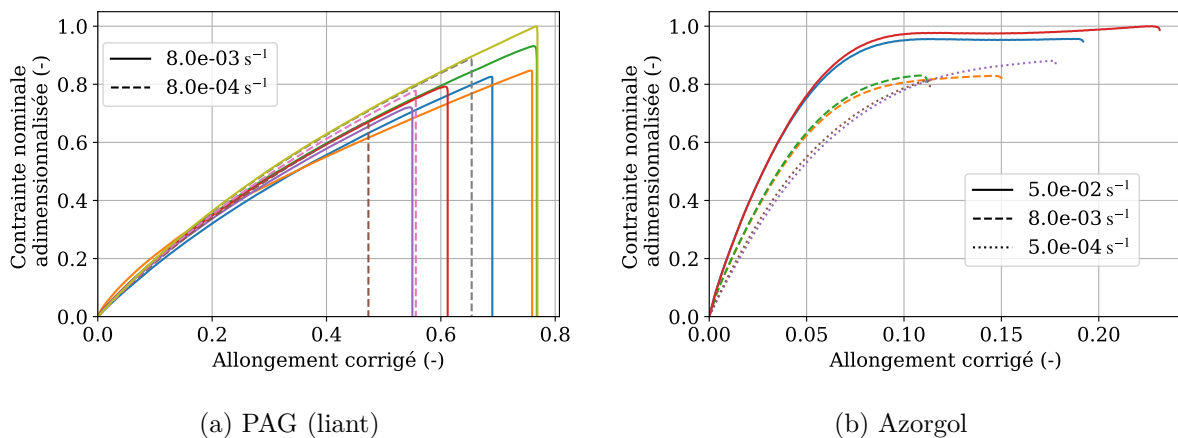


FIGURE 2 – Traction uni-axiale (une courbe par échantillon)

## 2.2 Comportements mécaniques

Des essais de traction uni-axiale ont été conduits sur le propergol et le liant à différentes vitesses de chargements pour observer les possibles effets visqueux. Les données macro (machine) ainsi que les données de déformations locales (corrélation d'image par mouchetis) sont obtenues. Des essais de compression confinée ont été menés sur le PAG permettant de caractériser la quasi-incompressibilité du matériau. La figure 2 présente les résultats des tractions uni-axiales du PAG et du propergol, la contrainte nominale est tracée en fonction de l'allongement macroscopique corrigé. L'allongement corrigé est nul lorsque l'effort machine est nul. Les niveaux de dilatations montrent un comportement hyperélastique du PAG qui induit un comportement hyperélastique pour le propergol également.

Le comportement du liant suit le modèle de Mooney-Rivlin à deux paramètres ( $C_{01}$ ,  $C_{10}$ ) [9]. Cette loi est exprimée par le potentiel de la partie incompressible, en fonction des invariants de la partie isochore du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C}$  :

$$W_d = (\bar{I}_1, \bar{I}_2) = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} (\bar{I}_2 - 3),$$

$$\bar{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}, \quad \bar{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3}, \quad I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2$$

À cela est ajouté un potentiel rendant compte de la variation de volume déterminé à partir des essais de compression confinée sur le liant et exprimé en fonction de  $J$  :

$$W_s(J) = \frac{K}{2} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \log(J) \right],$$

où le module de compressibilité  $K$  est grand devant les deux autres paramètres rendant compte du comportement quasi-incompressible du PAG (coefficient de Poisson proche de 0,5).

Les charges ont une réponse mécanique élastique linéaire. Les modules d'Young et les coefficients de Poisson du RDX et du PA-F sont présentés dans le tableau 2. Le ratio des modules d'Young entre les charges et le liant est de l'ordre de  $10^5$ , ainsi les déformations dans les charges sont infinitésimales.

## 2.3 Comportement linéarisé du PAG

Dans un premier temps, on souhaite déterminer le comportement homogène initial et donc obtenir une loi de comportement linéarisée dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations

TABLE 2 – Paramètres matériaux : module d’Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ; tirés de [1] pour PA-F et RDX

Paramètres	PAG	PA-F	RDX
$E$ (MPa)	0,9770314	19300	16000
$\nu$	0,49983716	0,309	0,25

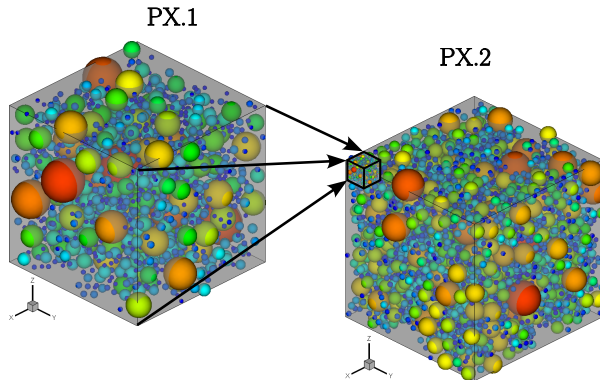


FIGURE 3 – Principe de l’homogénéisation récursive

(HPP). Nous utiliserons une loi de Hooke classique pour le comportement homogénéisé, ainsi l’identification du module d’Young et du module de compressibilité suffiront pour cette loi. Dans ce cadre HPP, le comportement du PAG est approximé grâce à une linéarisation du tenseur des dilatations  $\mathbf{C}$  qui permet d’exprimer les coefficients de Lamé en fonction des paramètres de la loi de Mooney-Rivlin présentée :

$$\begin{aligned}\mu &= 2(C_{10} + C_{01}) \\ \lambda &= K + 4 \left[ C_{01} - \frac{1}{3}(C_{10} + 4C_{01}) \right]\end{aligned}$$

À partir de ces paramètres on peut calculer le module d’Young et le coefficient de Poisson qui sont présentés dans le tableau 2. Cette première étape en élastique linéaire permet également de tester nos outils numériques avant d’aborder le cas en grandes déformations.

### 3 Homogénéisation récursive linéaire

#### 3.1 Principe de l’homogénéisation récursive

L’homogénéisation récursive consiste à séparer la distribution de taille de charge en plusieurs sections, chaque section constituant un volume élémentaire micromécanique associé à une échelle donnée. Une section forme un modèle éléments finis (dénommé pack) qui est simulé et dont le comportement homogénéisé fournit le comportement de la matrice de la section à l’échelle supérieure. Dans notre cas deux échelles sont utilisées (cf figure 3). La distribution de taille de charge est séparée en deux. Les charges de taille inférieure/supérieure à un seuil forment ainsi la première/deuxième section (PX.1/PX.2). La fraction volumique de charge du matériau réel est conservée en ajustant les fractions ( $f^v$ ) de chaque section :  $f_{charges}^v = f_{charges}^{v,PX.1} \times f_{liant}^{v,PX.2} + f_{charges}^{v,PX.2}$

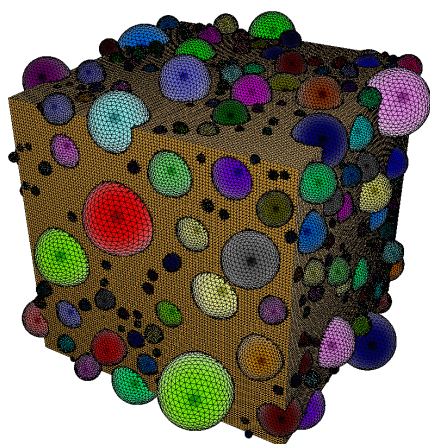
#### 3.2 Moyens techniques

##### 3.2.1 Présentation des packs

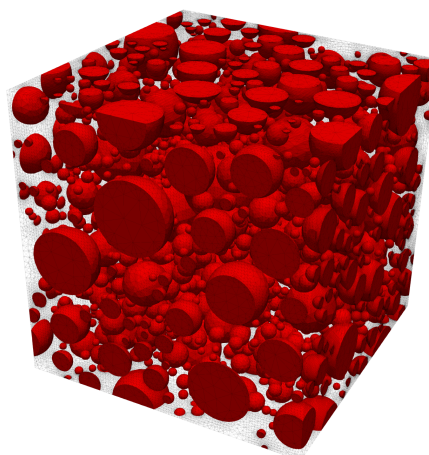
La distribution de taille de charges est répartie en 52 classes. La classe la plus grande est limitée à 133  $\mu\text{m}$  afin de restreindre le nombre de particules et cette dernière classe cumule les

TABLE 3 – Statistiques des maillages (éléments c3d10)

Pack	$N_{noeuds}$	$N_{elements}$
P1.1	7M	5M
P4.2	14M	12M



(a) Maillage résultant de l'intersection des maillages surfaciques



(b) Maillage volumique des inclusions de P1.1

FIGURE 4 – Maillage des packings

fractions volumiques des particules de taille supérieure éliminées. Le seuil séparant les deux sections pour l'homogénéisation récursive est fixé à  $14\mu\text{m}$ . Le DMPE (Département Multi-Physique et Energétique) de l'ONERA a fourni les données de 4 packings PX.1 pour la première section et 4 PX.2 pour la deuxième section. Ce qui varie entre chaque pack d'une même section est la taille de charge minimale pour PX.1 et maximale pour PX.2 prise en compte et les tailles des VERs. Tous les packs sont ensuite maillés en partie grâce aux outils développés dans *A-set* par Vincent Chiaruttini (SafranTech). Toutes les charges sont considérées sphériques lors du processus de maillage. Ce processus s'effectue en plusieurs étapes :

- Etape 1 : maillage surfacique des charges
- Etape 2 (*A-cracks*) : intersection avec un maillage du domaine (cf figure 4a)
- Etapes successives : remaillage, optimisation, passage d'éléments tétraèdres linéaires à des éléments tétraèdres quadratiques

Le tableau 3 présente les caractéristiques du plus petit et du plus grand maillage.

### 3.2.2 Présentation des simulations

On souhaite déterminer les paramètres matériaux homogénéisés des packs pour cela deux modélisations différentes sont simulées. La première est une traction uni-axiale permettant d'obtenir le module d'Young. La deuxième est une compression confinée : des déplacements normaux nuls sont imposés sur 5 faces du VER, la face restante a un déplacement imposé en compression. Les deux cas sont simulés en faisant varier l'axe traction/compression dans les directions cartésiennes (X,Y,Z). Les contraintes macroscopiques sont obtenues via un post-traitement. Pour chaque packing sont obtenus les modules de compressibilité  $K_i$  et d'Young  $E_i$  dans chaque direction qui seront dénommés les modules directionnels, et les moyennes de ces modules dénommées les modules moyens.

Les éléments mixtes sont utilisés pour gérer le caractère quasi-incompressible de la matrice et ainsi éviter les phénomènes de verrouillage numérique. Les simulations HPP utilisent les éléments mixtes de *Z-set*. La matrice utilise des éléments finis 3 champs, déplacement - pression - variation de volume où le déplacement est quadratique et la pression et la variation de volume

sont linéaires. Les charges utilisent ces mêmes éléments, mais la pression et la variation de volume sont constantes par élément et discontinues entre les éléments.

### 3.2.3 Calcul parallèle

Les maillages ont un grand nombre de noeuds et d'éléments. Les simulations utilisent le parallélisme par décomposition de domaines. Tous les maillages sont décomposés en 96 sous-domaines. Afin d'aider la convergence des simulations, la décomposition assure que chaque sphère soit entièrement à l'intérieur d'un sous-domaine. La méthode Multipreconditioned FETI est utilisée pour résoudre le système. Le système étant symétrique indéfini, c'est un solveur GMRes multipréconditionné (MPGMRes) qui est associé à la formulation FETI. Le préconditionneur est de type Dirichlet. Le multipréconditionnement apporte de la robustesse mais comme toute formulation duale, le calcul des inverses généralisés et des noyaux reste un point critique pour les problèmes fortement hétérogènes [10]. Cette différence de rigidité qui se retrouve également dans les calculs locaux (dans chaque sous-domaine) est un point de difficulté pour les simulations des propegols.

### 3.3 Résultats de l'homogénéisation

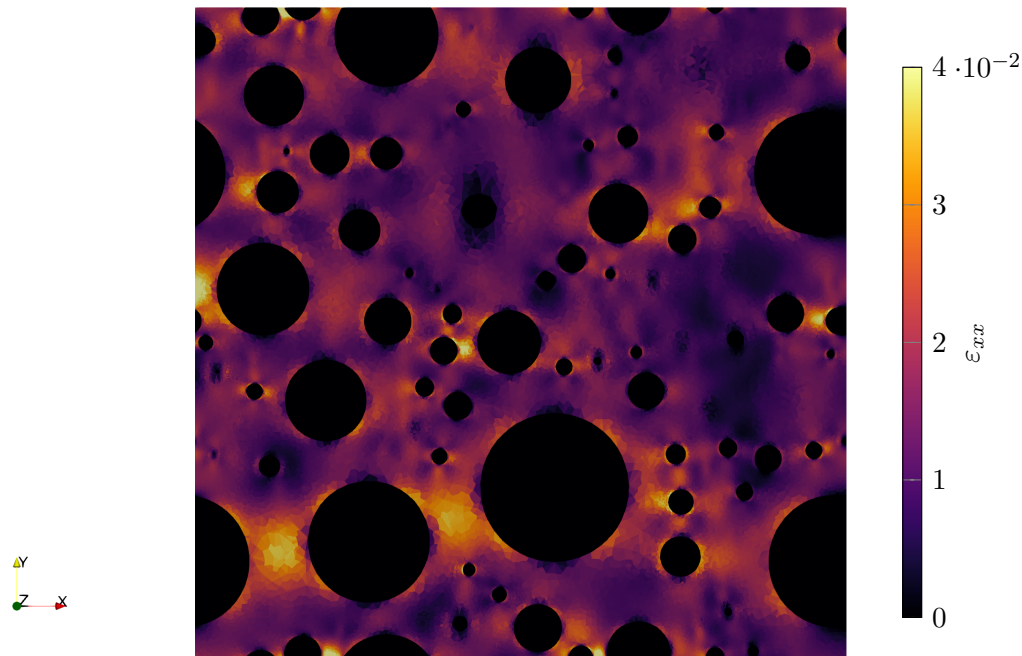


FIGURE 5 – Déformation  $\varepsilon_{xx}$  suite à une traction uni-axiale selon X (horizontal) d'un calcul EF, déformation : maximale- $\varepsilon_{xx,max} = 0,289$ , minimale- $\varepsilon_{xx,min} = -0,102$ , macro- $E_{xx} = 0,01$

Tous les packs ont été simulés, l'hétérogénéité du matériau provoque des localisations de la déformation (figure 5). Les graphiques de la figure 6 présentent les résultats des modules directionnels et moyens obtenus pour chaque pack. Une brève étude de l'isotropie matérielle et de la représentativité de chaque pack a permis de valider l'exploitation des résultats fournis de chaque pack. Ainsi, le comportement du liant des packs de la deuxième section est la moyenne des comportement homogénéisé de la première section.

À partir de ces résultats, une loi de comportement élastique linéaire est déterminée. Les modules d'Young et de compressibilité sont les moyennes des modules moyens des packs de la deuxième section (*PX.2*). Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson sont déterminés à partir de ces deux modules, considérant le matériau isotrope, avec les formules suivantes :

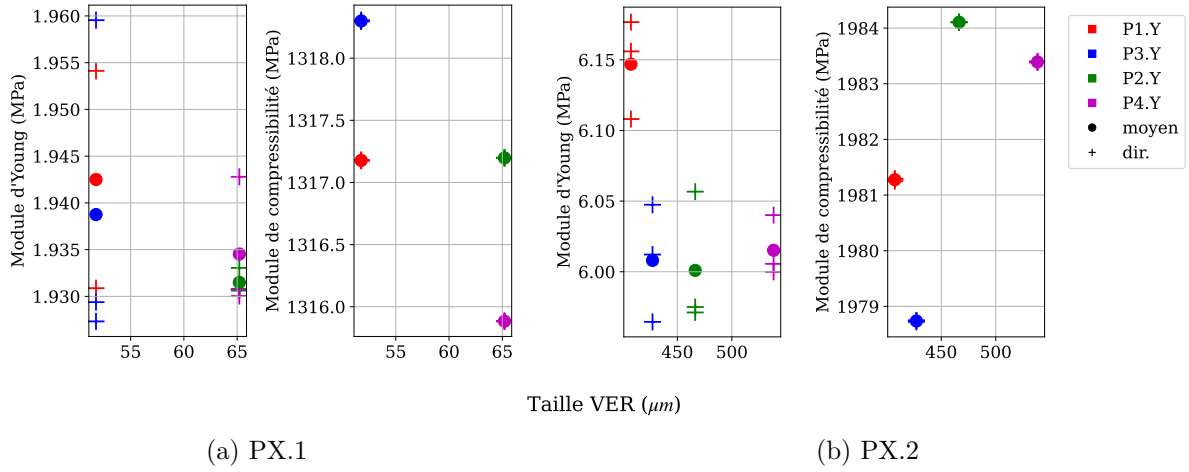


FIGURE 6 – Modules d’Young et de compressibilité moyens et directionnels pour tous les packs obtenus par homogénéisation numérique

TABLE 4 – Paramètres matériaux homogénéisés d’après l’homogénéisation récursive élastique linéaire (éléments finis) et les schémas d’homogénéisation analytique

Module	$E$ (MPa)	$K$ (MPa)	$G$ (MPa)	$\nu$
Éléments finis	6,0428	1981,8	2,0149	0,4994918
Borne de Reuss	2,1315	1986,8	0,7106	0,4998212
Borne d’Hashin-Shtrikmann inférieure	3,8117	1987,1	1,2875	0,4996803
Mori-Tanaka	3,8626	2182,2	1,2878	0,4997050

$$G = \frac{3KE}{9K - E}, \quad \nu = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E}{3K} \right)$$

Le tableau 4 présente les paramètres matériaux dans le cadre HPP obtenus grâce à l’homogénéisation élastique linéaire. Ces résultats sont comparés avec les paramètres obtenus avec les schémas classiques d’homogénéisation analytique [11][12]. Ceux-ci ont été calculés utilisant les mêmes lois de comportement et les fractions volumiques expérimentales (cad. obtenues lors de la composition du propergol). Or les fractions volumiques des maillages utilisés pour les calculs EF sont légèrement inférieures dû à l’approximation des sphères par des polyèdres. Cela explique pourquoi le module  $K$  obtenu par EF est inférieur aux bornes de Reuss et d’Hashin-Shtrikmann. Pour ce type de matériau composite (matrice molle quasi-incompressible et inclusions sphériques rigides)  $K$  est très proche des bornes inférieures, ainsi une légère sous-estimation de la fraction volumique des charges, telle que dans notre cas, amène à cette ambiguïté. Cependant, l’objectif ici est de comparer l’approximation obtenue par calculs EF, qui est donc une somme d’approximations (génération des packs, maillages, simulations EF), et le résultat analytique à partir des données réelles du matériau (la fraction volumique ici en l’occurrence). L’écart relatif est de 0,2% et donc suffisamment faible pour tout de même valider notre résultat. On peut tout de même dire que les bornes analytiques inférieures donnent un résultat satisfaisant pour le module de compressibilité de ce matériau. En ce qui regarde les autres paramètres, les schémas d’homogénéisation analytique donnent des résultats différents par rapport aux calculs EF.  $E$  et  $G$  analytique ne peuvent être considérés comme appropriés, contrairement à  $K$ , au vu des résultats expérimentaux qui sont discutés ci-après.

Le tableau 5 présente les modules d’Young initiaux obtenus expérimentalement : 3 tractions uni-axiales d’éprouvettes rectangulaires de propergols avec 3 vitesses de tractions différentes. Les valeurs expérimentales sont supérieures à celle obtenues par EF. Cette sous-estimation du calcul EF peut être liée à la non prise en compte des effets de vitesses dans la modélisation EF car les résultats expérimentaux montrent que ces effets ne peuvent être négligés sur le propergol

TABLE 5 – Module d’Young initial d’après les essais expérimentaux de traction uni-axiale pour 3 vitesses différentes

Vitesses de déformation macroscopique $s^{-1}$	$5 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-2}$
Module d’Young initial $E_0$ (MPa)	$8,98 \pm 0,31$	$12,80 \pm 0,04$	$16,17 \pm 0,10$

(figure 2b). Les conditions des essais pour caractériser le PAG (vitesses de déformations macro du même ordre que pour les essais sur propergol) n’ont pas permis de noter ces effets. Deux explications sont envisagées : (i) la matrice chargée est différente du liant seul auquel cas le comportement de la matrice du propergol est différent de celui du PAG. En suivant cette explication il serait nécessaire d’effectuer de nouveaux essais afin de caractériser la matrice du propergol comprenant le PAG et les additifs. (ii) Les charges induisent des vitesses de déformations locales très importantes (supérieures à celles de nos essais) ce qui mettrait en évidence la viscosité du liant. Ainsi, en suivant cette explication il est possible que le module d’Young utilisé pour la loi de comportement élastique linéaire du PAG corresponde au module d’Young de relaxation infinie et donc une loi de comportement viscoélastique permettrait de rigidifier le matériau et obtenir les valeurs expérimentales.

## 4 Conclusion

L’homogénéisation récursive élastique linéaire des propergols et les perspectives en hyperélastique ont été présentées. L’homogénéisation récursive dans le cadre élastique linéaire a permis de déterminer les paramètres de rigidité initiaux. Ces paramètres sont inférieurs à ceux des essais expérimentaux expliqué soit par la viscoélasticité de la matrice soit par les additifs ajoutés dans le liant. Des simulations avec une modélisation hyperélastique sont en cours. Les premiers résultats montrent l’importance de la formulation en grandes déformations même pour des niveaux de déformations macroscopiques très faibles (1%). La grande difficulté de la modélisation hyperélastique est la convergence des calculs. L’une des causes est la présence d’éléments trop distordus. Les zones de liant coincées entre deux charges proches l’une de l’autre mènent à de très importantes déformations locales et donc à ces éléments distordus. Afin de mieux analyser les résultats, des mesures de qualité adaptées aux maillages d’ordre 2 sont à l’étude. L’objectif est double : (i) voir s’il y a ou non une corrélation importante entre le taux de convergence et ces mesures, (ii) déterminer si les mesures prenant en compte l’aspect ordre 2 du maillage sont plus adaptées. Des résultats plus complets sont attendus pour le colloque.

## Mention

Ce travail est soutenu financièrement par le Ministère des Armées - Agence de l’Innovation de Défense et l’ONERA.

## Références

- [1] Foucault de Francqueville, Julie Diani, Pierre Gilormini, and Aude Vandenbroucke. Use of a micromechanical approach to understand the mechanical behavior of solid propellants. *Mechanics of Materials*, 153 :103656, February 2021.
- [2] Yuexun Liu, Weijian Qian, Long Wang, Yanling Xue, Chuantao Hou, and Shengchuan Wu. In situ X-ray tomography study on internal damage evolution of solid propellant for carrier rockets. *Materials Science and Engineering : A*, 882 :145451, August 2023.
- [3] Wang Jiaxiang, Qiang Hongfu, Pei Shudi, and Li Shiqi. Experimental and simulation study on micro damage of HTPB propellant under multi angle tensile shear loading. *Polymer Testing*, 148 :108841, July 2025.
- [4] J. Y. S. Li-Mayer, D. Lewis, S. Connors, A. Glauser, D. M. Williamson, H. Arora, and M. N. Charalambides. Hierarchical multi-scale models for mechanical response prediction of highly filled elastic-plastic and viscoplastic particulate composites. *Computational Materials Science*, 181 :109734, August 2020.

- [5] Gyoo-Dong Jung and Sung-Kie Youn. A nonlinear viscoelastic constitutive model of solidpropellant. *International Journal of Solids and Structures*, 36(25) :3755–3777, September 1999.
- [6] J.C. Simo. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : Formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60(2) :153–173, February 1987.
- [7] F. Gouhier, J. Diani, and A. Vandenbroucke. A finite strain viscoelastic model with damage and tension–compression asymmetry considerations for solid propellants. *Mechanics of Materials*, 199 :105152, December 2024.
- [8] Foucault de Francqueville. *Etude micromécanique du lien entre endommagement local et comportement macroscopique de propergols solides*. phdthesis, Institut Polytechnique de Paris, December 2019.
- [9] R. S. Rivlin and D. W. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci*, 243(865) :251–288, April 1951.
- [10] Christophe Bovet. On the use of graph centralities to compute generalized inverse of singular finite element operators : Applications to the analysis of floating substructures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124(9) :1933–1964, 2023. \_eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.7193>.
- [11] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127–140, March 1963.
- [12] T Mori and K Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571–574, May 1973.