

# Modélisation et identification des propriétés élastiques spatialement variables des composites à fibres longues discontinues par une méthode de champs aléatoires et des essais CIN

A. Touminet<sup>1,2</sup>, S. Cantournet<sup>1</sup>, V. Fabre<sup>2</sup>, P. Kerfriden<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centre des Matériaux, Mines Paris, Versailles, {armand.touminet,sabine.cantournet,pierre.kerfriden}@minesparis.psl.eu

<sup>2</sup> Centre de Recherche et Innovation, Hutchinson SA, Châlette sur Loing, {armand.touminet,victor.fabre}@hutchinson.com

**Résumé** — Nous présentons une méthode de champs aléatoires pour modéliser la variabilité spatiale et l'anisotropie des propriétés élastiques des matériaux composites à fibres discontinues (DLF). Notre approche s'appuie sur la description du tenseur d'élasticité à l'échelle mésoscopique par un champ aléatoire non-Gaussien à valeur tensorielle, construit par transformation de champs Gaussiens. Nous présentons également comment étalonner les hyperparamètres du modèle et identifier des réalisations du champ tensoriel à partir d'observations surfaciques obtenues par corrélations d'images numériques.

**Mots clés** — Composites DLF, corrélation d'images numériques, FEMU, champs aléatoires

## 1 Introduction

Les matériaux composites à fibres discontinues (DLF), comme les SMC à fibre de carbone, ou composites à chips, présentent un bon potentiel pour remplacer certaines pièces en acier dans l'industrie automobile en raison de leur grande rigidité spécifique. Toutefois, en raison de l'utilisation de fibres longues discontinues, les composites DLF présentent une microstructure hétérogène et une mauvaise séparation d'échelles entre la microstructure et la pièce, ce qui pose des difficultés de caractérisation mécanique. En particulier, la variabilité microstructurale a un impact non négligeable sur les propriétés à l'échelle macroscopique [1, 2]. À l'échelle de la pièce, les propriétés mécaniques sont aléatoires et il est alors difficile de garantir un certain niveau de performance en service.

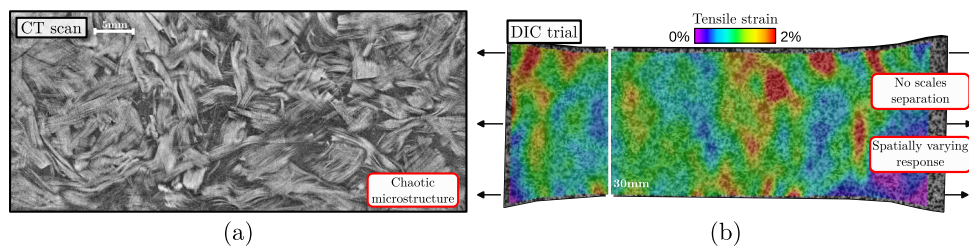


Figure 1 – Mise en évidence de la variabilité spatiale des propriétés mécaniques des composites DLF. (a) Coupe d'une tomographie RX d'une pièce SMC en fibres de carbone : les différents paquets de fibres sont disposés aléatoirement au sein de la pièce ; (b) Champ de déformation obtenu par CIN lors d'un essai de traction : la réponse mécanique présente une importante variabilité spatiale.

Les méthodes de modélisation des composites DLF doivent alors prendre en compte cette variabilité spatiale. Dans l'état de l'art, les méthodes usuelles sont purement numériques et sont constituées des étapes suivantes :

- Simulation du procédé de mise en forme, en l'espèce le moulage par thermocompression afin de prédire l'état microstructural au sein de la pièce [3, 4, 5] ;
- Modélisation de l'état microstructural à l'échelle mésoscopique par un algorithme d'*Adsorption Séquentielle Aléatoire* consistant en l'échantillonnage d'orientation de fibres en chaque élément du domaine [1, 2] ;
- Homogénéisation numérique basée sur des méthodes de champ moyen (e.g. Mori-Tanaka) ou sur

des méthodes éléments finis afin de prédire les propriétés élastiques effectives [6].

Dans ces approches, la variabilité spatiale de la réponse mécanique est une conséquence directe des paramètres des algorithmes utilisés à chaque étape. Ces approches présentent certaines limites, notamment l'étape de simulation du procédé de mise en forme qui se base sur de nombreuses hypothèses simplificatrices [3] et aboutit à une mauvaise fidélité des résultats dans certains cas (géométrie complexe, écoulement de fluide important lors de la mise en forme). Dans ces travaux, nous présentons une approche différente, ne requérant pas la simulation complexe du procédé de mise en forme, dans laquelle la statistique spatiale est directement modélisée à l'échelle mésoscopique, et qui utilise des essais de corrélation d'images numériques (CIN) afin d'étalonner les paramètres du modèle. La particularité de notre modélisation est qu'elle s'appuie sur un champ aléatoire non-Gaussien pour représenter le tenseur d'élasticité à l'échelle mésoscopique. Une approche similaire a déjà été mise en œuvre dans certains travaux comme [7, 8] pour d'autres matériaux. L'approche proposée est plus spécifique au cas des composites DLF et s'appuie sur le formalisme existant dans la littérature des composites DLF pour la construction du modèle. Le formalisme mathématique pour la construction du modèle et l'identification des paramètres se base sur notre précédent article [9] (présenté lors du CSMA2024), et le met en œuvre dans le cas des composites DLF.

Les principales contributions de notre approche sont les suivantes :

- Modélisation des propriétés élastiques des composites DLF par un champ aléatoire à valeur tensorielle. À la connaissance des auteurs, c'est la première fois qu'une méthode de ce type est utilisée dans le cadre de l'étude des composites DLF ;
- Une procédure d'étalonnage du modèle, à partir d'essais de CIN, est proposée, se basant sur nos précédents travaux [9] ;
- Nous montrons que l'approche proposée permet de modéliser correctement la statistique spatiale des composites DLF, par une validation de la méthode sur un jeu de données expérimentales.

## 2 Méthode

Dans cette section, nous présentons les grandes lignes de la méthode développée pour la modélisation des propriétés élastiques des composites DLF. Dans toute la suite, les tenseurs d'ordre 1, 2 et 4 sont notés  $a$ ,  $q$  et  $\underline{q}$  respectivement.

### 2.1 Construction du modèle de champ aléatoire

On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  représentant un composite DLF. On suppose une distribution d'orientation de fibres 2D contenue dans le plan  $(xy)$ , ce qui est une hypothèse réaliste pour de nombreuses pièces DLF [4]. Le domaine est occupé par un mélange de résine (thermoplastique ou thermodurcissable) et de fibres, caractérisé par : le tenseur d'élasticité isotrope de la résine  $\underline{C}_M$  désignant respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson ; le tenseur d'élasticité isotrope transverse des fibres, noté  $\underline{C}_F$ , le repère local des fibres  $\underline{Q}_z(x) \in SO(3)$  pour  $x \in \Omega_F$ , où  $\Omega_F \subset \Omega$  est le sous-domaine occupé par les fibres et  $\underline{Q}_z$  une matrice de rotation dans le plan des fibres. En tout point, le tenseur d'élasticité à l'échelle microscopique peut s'écrire

$$\forall x \in \Omega, \exists \underline{Q}_z(x) \in SO(3), \underline{C}(x) = \mathbf{1}_F(x) \underline{Q}_z(x) : \underline{Q}_z(x) : \underline{C}_F : \underline{Q}_z(x) : \underline{Q}_z(x) + (1 - \mathbf{1}_F(x)) \underline{C}_M \quad (1)$$

où  $\mathbf{1}_F$  est la fonction indicatrice de  $\Omega_F$ . La formulation (1) n'est pas utilisable dans un cadre réaliste car l'état d'orientation des fibres  $\underline{Q}_z$  complet est inconnu, et difficilement observable sur une pièce complète. Nous reformulons alors (1) à l'échelle mésoscopique, où en chaque point du domaine  $x \in \Omega$ , nous considérons les propriétés effectives d'un petit voisinage  $V(x) \subset \Omega$  à l'instar de ce qui est fait dans le formalisme développé dans les travaux d'Ostojia-Malyarenko [10]. Nous introduisons ainsi deux descripteurs mésoscopiques : la densité locale de fibres  $d : \Omega \rightarrow [0; 1]$ , et la distribution d'orientation locale de fibres représentée par un champ de tenseurs d'orientation d'ordre deux (dans le cas des distributions planes)  $a_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ . Nous utilisons le formalisme des tenseurs d'orientation afin de représenter

les distributions d'orientation, comme c'est couramment le cas dans la littérature associée aux composites DLF (e.g. dans [3, 6]). En réalité, comme détaillé dans [11], l'ensemble des tenseurs d'orientation d'ordre deux  $a_2(\Omega)$  est une sous-variété de dimension 2. Une paramétrisation est obtenue à partir de la diagonalisation de la matrice, qui peut se réécrire

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \exists \underline{Q} \in SO(2), \exists \lambda \in [0; 1], a_2(\underline{x}) = \underline{Q}^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \underline{Q}. \quad (2)$$

Cette diagonalisation offre une interprétation géométrique :  $\underline{Q}(\underline{x})$  représente l'orientation principale de la distribution de fibres dans le voisinage  $V(\underline{x})$ , et  $|2\lambda - 1|$  représente le degré d'anisotropie de la distribution. Cette modélisation à l'échelle mésoscopique nous conduit donc à considérer trois descripteurs géométriques présentant une variabilité spatiale :  $d$ ,  $\lambda$  et  $\underline{Q}$ . Nous proposons alors de modéliser la variabilité spatiale en introduisant deux champs Gaussiens auxiliaires, reliés aux descripteurs géométriques par des transformations non-linéaires. Plus précisément, considérons les deux champs Gaussiens  $p_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, C_0)$  à valeur scalaire, et  $\underline{p}_1 \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}_1, \underline{C}_1)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ , où  $\mu_0$  et  $\underline{\mu}_1$  sont les moyennes des distributions marginales, et  $C_0$  et  $\underline{C}_1$  les fonctions de covariance et covariance croisée. À partir de ces champs Gaussiens, on se ramène à la densité de fibres et au tenseur d'orientation d'ordre deux par des transformations explicites. Pour la densité, on transforme simplement le premier champ auxiliaire par une sigmoïde :  $d = 1/(1 + \exp(-p_0))$ . Avec cette définition,  $d$  est un champ non-Gaussien à valeur dans  $[0; 1]$ .

Pour le tenseur d'orientation, on se ramène d'abord à un champ à valeur dans le disque ouvert  $\mathcal{D}^2$  par la transformation  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$  définie par  $H(\underline{p}_1) = \underline{p}_1 / (\|\underline{p}_1\| + 1)$ . Puis, on pose  $\lambda = (\|H(\underline{p}_1)\| + 1)/2$ , et, pour  $\|H(\underline{p}_1)\| > 0$ ,

$$\theta = \arccos \frac{\langle H(\underline{p}_1), \underline{e}_x \rangle}{\|H(\underline{p}_1)\|}. \quad (3)$$

On définit alors le tenseur d'orientation à l'aide de la formule (2), en prenant  $\lambda(\underline{p}_1)$  pour  $\lambda$ , et la matrice de rotation d'angle  $\theta(\underline{p}_1)$  pour  $\underline{Q}$ . On complète la définition par continuité avec  $a_2(\underline{0}) = \underline{I}_2/2$ , où  $\underline{I}_2$  est la matrice identité. Cela nous permet ainsi de construire d'une part un champ aléatoire non-Gaussien  $d(\underline{p}_0)$  à valeur dans  $[0; 1]$ ; et d'autre part, un champ aléatoire  $a_2(\underline{p}_1)$  à valeur dans la sous-variété de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  des tenseurs d'orientation d'ordre deux.

Pour terminer l'explication, on construit un champ aléatoire de tenseurs d'élasticité, par une transformation explicite des champs  $d(\underline{p}_0)$  et  $a_2(\underline{p}_1)$ . La transformation utilisée est une formule d'homogénéisation de Voigt en deux étapes. Premièrement, on considère l'impact de la densité locale de fibres. On définit alors le tenseur d'élasticité homogénéisé  $\underline{\underline{C}}_{UD}$  correspondant à un composite unidirectionnel de fraction volumique de fibres  $d(\underline{p}_0)$  :

$$\underline{\underline{C}}_{UD}(\underline{p}_0) = d(\underline{p}_0)\underline{\underline{C}}_f + (1 - d(\underline{p}_0))\underline{\underline{C}}_M. \quad (4)$$

Puis, on considère l'impact de la distribution d'orientation en calculant le tenseur élastique effectif d'un empilement de composites unidirectionnels de propriétés  $\underline{\underline{C}}_{UD}$ , et de distribution d'orientation  $a_2$ . On procède par une moyenne angulaire :

$$\underline{\underline{C}}_{\text{eff}} = \int_0^{2\pi} \underline{\underline{Q}}(a_2(\theta)) : \underline{\underline{C}}_{UD} : \underline{\underline{Q}}(a_2(\theta)) \psi_{a_2}(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Dans (5),  $\psi_{a_2}$  est une distribution d'orientation reconstruite à partir de  $a_2$ . Il s'agit d'une fonction d'intégrale 1, symétrique et positive. L'intégrale (5) est de type « moyenne angulaire », et peut alors être calculée en suivant la méthode décrite dans [3].

La formule (5) forme une construction d'un champ aléatoire non-Gaussien  $\underline{\underline{C}}_{\text{eff}}$ , par transformation des champs Gaussiens  $p_0$  et  $\underline{p}_1$ , et paramétré par les propriétés mécaniques des matériaux utilisés,  $\underline{\underline{C}}_f$  et  $\underline{\underline{C}}_M$ . En particulier,  $\underline{\underline{C}}_{\text{eff}}$  est à valeur dans un ensemble borné, et les réalisations de  $\underline{\underline{C}}_{\text{eff}}$  représentent des valeurs réalistes vis-à-vis du matériau considéré (en négligeant bien sûr la simplification que consiste l'emploi d'une loi des mélanges de Voigt). Pour utiliser ce champ aléatoire, il reste à étalonner les hyperparamètres, en l'espèce les moyennes des distributions marginales  $\mu_0$ ,  $\underline{\mu}_1$  et les fonctions de covariance  $C_0$  et  $\underline{C}_1$ . Cela est l'objet de la section suivante.

**Remarque.** Dans cette sous-section, plusieurs simplifications ont été utilisées afin d’aboutir à un modèle simple et de limiter le nombre d’hyperparamètres. Premièrement, nous avons paramétré  $\underline{\underline{C}}_{\text{eff}}$  par un tenseur d’orientation d’ordre deux, et non quatre. Cela est discutable, notamment en vue des résultats de la littérature (e.g. [11, 6, 4]). L’explication pourrait être adaptée au cas des tenseurs d’ordre quatre, en utilisant la paramétrisation donnée dans [11], mais cela aboutirait à l’utilisation d’un plus grand nombre de champs Gaussiens auxiliaires ; la question délicate étant de déterminer si les données expérimentales issues de CIN sont suffisamment riches afin d’étalonner tous les hyperparamètres. De plus, un biais statistique est introduit sur la distribution marginale de  $\underline{\underline{C}}_{\text{eff}}$  par l’utilisation de transformations explicites. Une alternative serait d’utiliser à la place des transformations paramétriques et d’identifier également ces paramètres à partir des données expérimentales.

## 2.2 Étalonage du champ aléatoire et identification des champs de paramètres

Cette sous-section présente deux volets : l’étalonage des hyperparamètres du champ aléatoire défini en section 2.1, puis l’identification d’une réalisation de ce champ à partir d’essais de corrélation d’images numériques. La démarche repose largement sur nos travaux précédents [9], présentés au CSMA2024, qui traitaient le même problème à partir de données synthétiques. Dans ces travaux, les champs Gaussiens auxiliaires étaient scalaires et leur lien avec le champ de tenseur élastique n’était pas explicitement spécifié. Le présent article applique la même méthodologie au modèle présenté en section 2.1. Nous en rappelons donc uniquement les grandes lignes, en soulignant les adaptations nécessaires.

Une première simplification concerne la covariance croisée  $\underline{C}_1$  du champ auxiliaire  $p_1$ , que l’on suppose de la forme  $\underline{C}_1 = C_1 \underline{I}_2$ . Cette hypothèse néglige les dépendances entre composantes et reflète le rôle symétrique des deux composantes de  $p_1$ . Les fonctions de covariance  $C_0$  et  $C_1$  sont modélisées par une covariance de Matérn [9] :

$$M(r; \sigma^2, \ell, \nu) = \frac{\sigma^2 2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{\ell}\right), \quad (6)$$

où  $\sigma^2$ ,  $\ell$  et  $\nu$  désignent la variance marginale, la longueur caractéristique et un paramètre de régularité. Pour faciliter l’interprétation, on utilise plutôt la longueur de corrélation  $\rho = \ell\sqrt{10\nu}$ , définie comme la distance au-delà de laquelle la corrélation devient inférieure à 0.1. Les hyperparamètres associés à  $C_0$  et  $C_1$  sont notés  $\sigma_0^2, \rho_0$  et  $\sigma_1^2, \rho_1$ .

L’identification s’appuie sur une procédure itérative visant à optimiser les paramètres et hyperparamètres afin de réduire l’écart entre le déplacement observé par CIN et le déplacement simulé, selon l’approche FEMU (*Finite Elements Method Updating*). On considère pour cela un essai de traction simple sur une éprouvette composite mince instrumentée en CIN. La zone observée, notée  $\Omega^{\text{obs}} \subset \partial\Omega$ , est maillée, et l’on dispose d’un champ de déplacement  $\mathbf{u}^{\text{obs}}$  fourni par une CIN globale, ainsi que d’une force mesurée  $F^{\text{obs}}$ . En suivant la formulation bayésienne de [9], l’estimateur du *maximum a posteriori* découle du problème suivant, présenté dans une forme discrète :

$$\mathbf{p}^{\text{MAP}} = \underset{\mathbf{p} := (p_0, p_1)}{\text{argmin}} J_u(\mathbf{p}) + J_F(\mathbf{p}) + J_p(\mathbf{p}), \quad (7)$$

$$J_u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{\text{obs}} - \mathbf{u}(\mathbf{p}))^T \Sigma_u^{-1} (\mathbf{u}^{\text{obs}} - \mathbf{u}(\mathbf{p})), \quad (8)$$

$$J_F(\mathbf{p}) = \frac{(F(\mathbf{p}) - F^{\text{obs}})^2}{2\sigma_F^2}, \quad (9)$$

$$J_p(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^1 \frac{1}{2} (\mathbf{p}_i - \mu_i)^T \Sigma_{C_i}^{-1} (\mathbf{p}_i - \mu_i). \quad (10)$$

Ici et dans la suite, les notations en gras désignent la représentation discrète des champs dans une base d’éléments finis  $P^1$  (scalaire pour  $\mathbf{p}$ , vectoriel pour  $\mathbf{u}$ ). Le terme  $J_u$  pénalise l’écart entre déplacement observé et simulé,  $J_F$  l’écart de force macroscopique, et  $J_p$  correspond au *prior* Gaussien sur les champs auxiliaires, cohérent avec la modélisation aléatoire précédente ;  $\Sigma_{C_i}^{-1}$  est une approximation creuse de la matrice de précision associée à la covariance de Matérn.

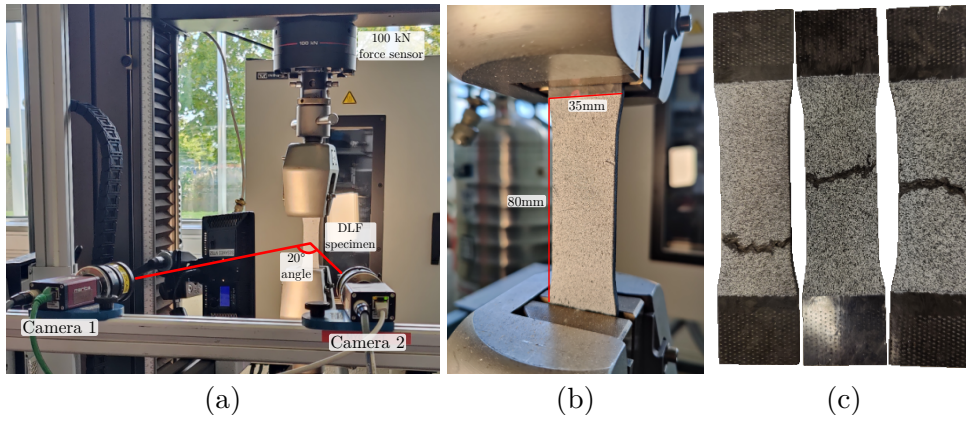


Figure 2 – (a) et (b) : Montage expérimental pour l’essai de traction instrumenté par Stéréo-CIN. (c) Profils de rupture pour trois des éprouvettes testées.

Pour des hyperparamètres fixés, l’optimisation de (7) est effectuée par un algorithme quasi-Newton, le gradient étant calculé par la méthode de l’adjoint. La stratégie globale consiste à alterner identification des paramètres et mise à jour des hyperparamètres à partir du variogramme des paramètres identifiés, selon un schéma de Bayes empirique détaillé dans [9].

Une différence notable avec [9] est la présence de deux covariances de Matérn à étalonner. Pour stabiliser la procédure, l’étape fondée sur les variogrammes est réalisée à partir d’un ensemble d’éprouvettes provenant de plaques fabriquées dans des conditions similaires. Chaque essai fournit ainsi une réalisation supplémentaire du processus sous-jacent, permettant un étalonnage plus robuste des hyperparamètres de covariance, sans modifier la fonction objectif (7) utilisée pour chaque éprouvette.

### 3 Résultats

Pour cette étude, nous avons réalisé des essais CIN sur un échantillon de douze éprouvettes SMC à fibres de carbone. Les éprouvettes ont été extraites de plaques de 2mm d’épaisseur, et ont une géométrie basée sur une modification de la géométrie présentée dans [12]. Les propriétés matière des microconstituents sont précisées dans le tableau 1. Pour chaque essai, un déplacement de 2mm/min est appliqué jusqu’à rupture, et l’essai est instrumenté par un système de stéréo-CIN avec une fréquence d’acquisition de 0.5Hz. Un capteur de force mesure  $F^{obs}$  à chaque pas de temps. Le montage expérimental est illustré en figure 2. Le champ de déplacement CIN a été calculé via un logiciel commercial appliquant une méthode de CIN globale non régularisée. Quelques champs de déplacement corrélés sont représentés en figure 3.

Résine vinylyester		Fibre de carbone				
$E_M$ (GPa)	$\nu_M$	$E_L$ (GPa)	$E_T$ (GPa)	$G_{LT}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{LT}$
4.0	0.3	240	10	20	6.5	0.3

Table 1 – Propriétés élastiques des microconstituents du SMC utilisé.

La méthode décrite en section 2 est mise en oeuvre avec les résultats d’essais. Le maillage utilisé pour les simulations est représenté en figure 4. On représente en figure 5 quelques résultats d’identification de paramètres. Dans ce cas, les valeurs identifiées pour les hyperparamètres sont  $\sigma_0 = 0.4$ ,  $\sigma_1 = 0.4$ ,  $\rho_0 = 8\text{mm}$  et  $\rho_1 = 12\text{mm}$ . Nous évaluons la pertinence de notre modèle en comparant l’écart résiduel entre le déplacement simulé et observé avec celui obtenu en utilisant des modèles plus simples. Cela est représenté en figure 6. En guise de comparaison, nous avons considéré un modèle élastique isotrope avec un module d’Young spatialement variable, et un modèle similaire en supposant que le champ de densité  $d$  n’a pas de variabilité spatiale. Les résultats montrent que le modèle proposé aboutit à un résidu de déplacement un ordre de grandeur plus bas que pour les deux autres modèles. Cela montre la pertinence du modèle proposé pour représenter correctement les données mesurées.

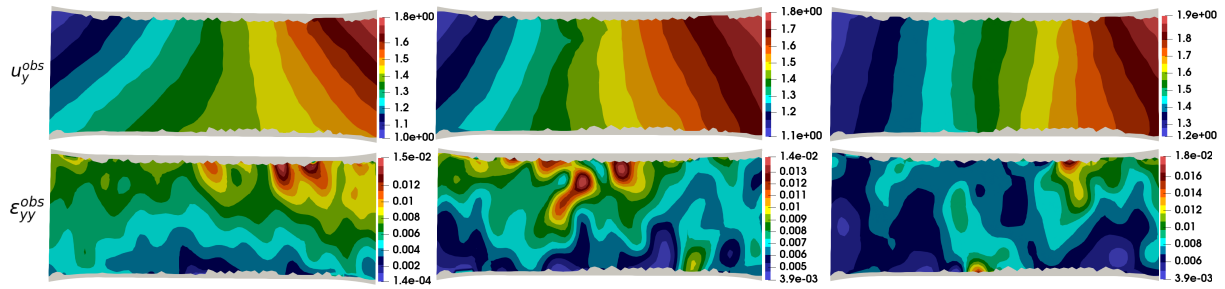


Figure 3 – Échantillon de champs de déplacement et de déformation corrélés à partir des essais. Dans cette figure, les champs de déformation sont calculés à partir du champ de déplacement traité par un filtre passe-bas.

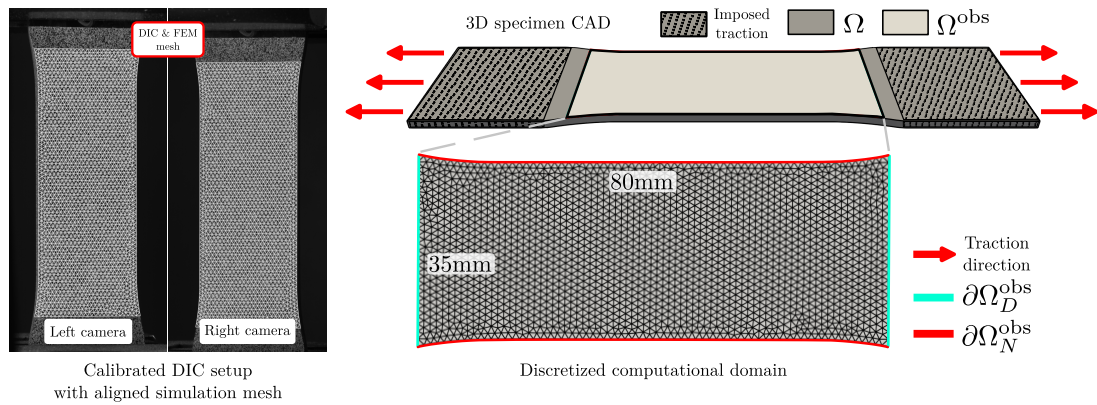


Figure 4 – Représentation du jumeau numérique de l'essai : on considère un maillage surfacique de la zone observée pour les simulations éléments finis, avec des conditions de Dirichlet sur les frontières non-libres.

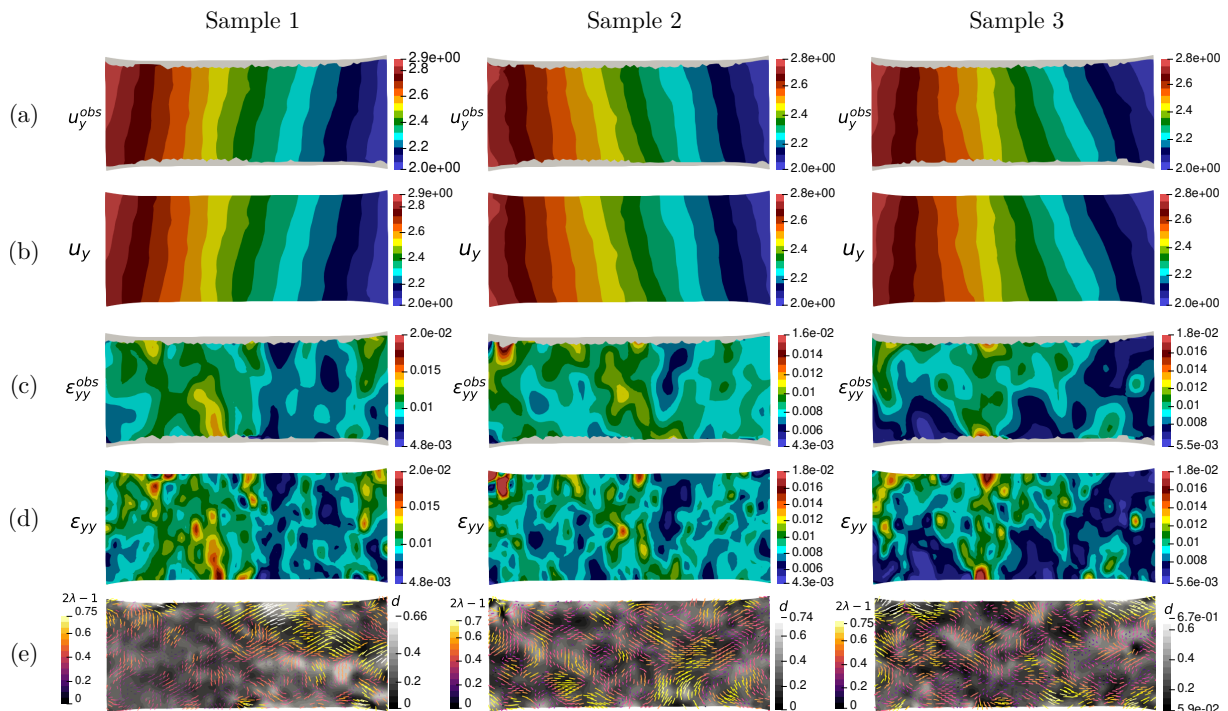


Figure 5 – Résultats d'identification de paramètres pour trois éprouvettes considérées. (a) Déplacement corrélé par CIN; (b) Déplacement simulé avec les paramètres identifiés; (c) Champ de déformation calculé à partir du déplacement CIN; (d) Champ de déformation simulé avec les paramètres identifiés; (e) Représentation combinée des paramètres identifiés : la densité de fibres  $d$  est représentée en niveaux de gris, et les vecteurs correspondent à l'orientation principale du tenseur d'orientation identifié, et sont de longueur  $2\lambda - 1$ .

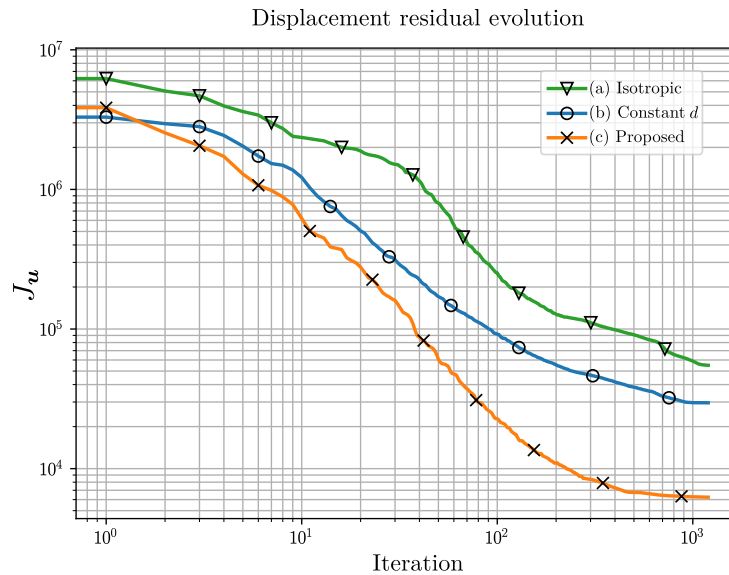


Figure 6 – Évolution du déplacement résiduel  $J_u$  pour chaque modèle de raideur considéré (a), (b) et (c).

## 4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de modélisation des propriétés élastiques des composites DLF directement à l'échelle mésoscopique via une méthode de champs aléatoire non-Gaussien à valeur tensorielle. Nous avons montré comment étalonner les paramètres du modèle à partir d'essais CIN. Le modèle proposé permet notamment de représenter correctement l'anisotropie et la statistique spatiale du matériau sans avoir besoin de mettre en oeuvre une chaîne numérique complexe se basant sur la simulation du procédé de mise en forme. Nous avons montré que la méthode proposée permet de représenter correctement les données observées par CIN, et qu'il surperforme des alternatives plus simples. En terme de perspectives, on pourrait s'intéresser à des géométries d'éprouvettes plus complexes, pour lesquelles la statistique spatiale est corrélée à la géométrie, ce qui est le cas lors du moulage de pièces complexe. Dans ce cas, des adaptations de la méthode seraient à envisager pour représenter correctement le matériau. Enfin, il serait intéressant de relaxer les différents biais statistiques formulés en section 2, notamment en s'inspirant des travaux de Soize [7].

## Références

- [1] Marina Selezneva, Steven Roy, Sean Meldrum, Larry Lessard, and Ali Yousefpour. Modelling of mechanical properties of randomly oriented strand thermoplastic composites. *Journal of Composite Materials*, 51(6) :831–845, 2017.
- [2] Marco Alves and Soraia Pimenta. The influence of 3d microstructural features on the elastic behaviour of tow-based discontinuous composites. *Composite Structures*, 251 :112484, 2020.
- [3] Suresh G. Advani and III Tucker, Charles L. The Use of Tensors to Describe and Predict Fiber Orientation in Short Fiber Composites. *Journal of Rheology*, 31(8) :751–784, 11 1987.
- [4] N. Meyer, L. Schöttl, L. Bretz, A. N. Hrymak, and L. Kärger. Direct bundle simulation approach for the compression molding process of sheet molding compound. *Composites / A*, 132 :Article : 105809, 2020.
- [5] N. Meyer, A. N. Hrymak, and L. Kärger. Modeling short-range interactions in concentrated newtonian fiber bundle suspensions. *International Polymer Processing*, 36(3) :255–263, 2021.
- [6] Julian Karl Bauer and Thomas Böhlke. On the dependence of orientation averaging mean field homogenization on planar fourth-order fiber orientation tensors. *Mechanics of Materials*, 170 :104307, 2022.

- [7] Christian Soize. *Random Vectors and Random Fields in High Dimension : Parametric Model-Based Representation, Identification from Data, and Inverse Problems*, pages 883–935. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [8] Johann Guilleminot, Christian Soize, Djimedo Kondo, and Christophe Binetruy. Theoretical framework and experimental procedure for modelling mesoscopic volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 45(21) :5567–5583, 2008.
- [9] Armand Touminet, Sabine Cantournet, Victor Fabre, and Pierre Kerfriden. A bayesian extension to femu for identification of spatially varying stochastic elastic properties from digital image and volume correlation measurements. *Journal of Computational Physics*, 531 :113946, 2025.
- [10] Anatoliy Malyarenko and Martin Ostoja-Starzewski. *Tensor-Valued Random Fields for Continuum Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2018.
- [11] Julian Karl Bauer and Thomas Böhlke. Variety of fiber orientation tensors. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 27(7) :1185–1211, 2022.
- [12] Kepa Zulueta, Aitor Arriaga, and Iñaki Martinez. Novel coupon geometry for tensile property determination of sheet molding compounds. *Materials Letters*, 285 :129087, 2021.