

# Sur une extension du principe de moindre action pour l'étude de la rupture dynamique de structures élastiques endommageables.

B. Kamagate<sup>1,4</sup>, R. Abdelmoula<sup>2</sup>, L. Cheng<sup>3</sup>, E. Danho<sup>4</sup>, D. Kondo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *d'Alembert (Sorbonne Université, CNRS), Paris, banouhokamagate@gmail.com, djimedo.kondo@sorbonne-universite.fr*

<sup>2</sup> *GeoResources Laboratory (Université de Lorraine, CNRS), Vandoeuvre-lès-Nancy, long.cheng@univ-lorraine.fr*

<sup>3</sup> *LSPM (Université Sorbonne Paris Nord, CNRS), Villetaneuse, radhi.abdelmoula@univ-paris13.fr*

<sup>4</sup> *Laboratoire de Mécanique et Informatique (Université Félix Houphouët-Boigny), Abidjan, Côte d'Ivoire  
banouhokamagate@gmail.com, danhoemile@yahoo.com*

---

**Résumé** — On s'intéresse ici à la question de l'extension du principe de moindre action aux systèmes standard dissipatifs tels que ceux induits par les processus d'endommagement et de rupture. A cette fin, on s'appuie sur les équations de Lagrange généralisées (incluant les lois d'évolution) pour mettre en évidence un Lagrangien modifié lorsque le système est à dissipation simple. Pour la résolution du problème variationnel en dynamique, on adopte un schéma d'intégration de type Newmark, combiné à une minimisation d'énergie donnant le champ d'endommagement, avec condition d'irréversibilité. Des résultats de simulations numériques d'une plaque préfissurée en traction dynamique sont présentées à titre d'illustration des capacités prédictives du modèle établi. Ceux correspondant au test de Kalthoff seront également exposés.

**Mots clés** — Endommagement dynamique, rupture, principe de moindre action.

---

## 1 Introduction générale

La mécanique de l'endommagement de structures quasi fragiles a connu ces dernières décennies de nombreux progrès qui doivent beaucoup au développement d'approches variationnelles dédiées permettant notamment de décrire la transition vers la rupture (voir par exemple [21], [1], [2], etc.) Leur succès grandissant ont suscité des extensions remarquables parmi lesquelles celles traitant de la rupture dynamique. Sans exhaustivité, mentionnons par exemple les travaux de [3], [5], [6], [7], [8]<sup>1</sup>, etc. De manière intéressante, tous ces travaux se sont remarquablement appuyés sur le principe de moindre action. Néanmoins, la justification précise du bien fondé de l'applicabilité de cette démarche dans le contexte de milieux dissipatifs n'a pas été véritablement apportée. Dans une publication récente, le problème d'endommagement dynamique a été remarquablement étudié en traitant successivement la partie réversible via une approche Lagrangienne étendue (à l'endommagement) puis les lois d'évolution. Le problème global de minimisation est reformulé en un système hyperbolique local avec termes sources, aisément résoluble par volumes finis. Des simulations numériques en fragmentation et écaillage unidimensionnels ont permis à ces auteurs de montrer la pertinence de la démarche proposée.

Sur un plan général, la question de l'intégration des processus dissipatifs dans une approche de mécanique Lagrangienne remonte aux travaux de Lord Rayleigh [9] qui, à cette occasion avait introduit la notion de fonction de dissipation et proposé une extension des équations de Lagrange (voir à ce sujet l'ouvrage de mécanique classique [10], pages 24 et 52, pour les difficultés posées). Dans les années 60 et 70, et dans une série de publications consacrées notamment à la viscoélasticité, M.A.Biot (voir par exemple [11]) a tenté de développer ce type de démarche en introduisant des équations de Lagrange généralisées. [22] (voir également [12]) a notablement considéré ces équations de Lagrange généralisées, dans le contexte des milieux dont les processus dissipatifs sont décrits à l'aide de variables internes, mais sans complètement explicité de façon générale le principe de moindre action.

---

1. Ces auteurs proposent une analyse critique intéressante de différentes possibilités de description (elliptique, parabolique, hyperbolique) de l'endommagement dynamique.

Dans la présente communication consacrée aux phénomènes d'endommagement et de rupture dynamique, on se propose d'examiner dans quelle mesure un Lagrangien modifié pourra être exhibé. On montrera que ceci est possible pour des systèmes dits à dissipation simple que nous précisons plus loin, ce qui ouvrira de facto la voie à l'établissement d'un principe de moindre action modifié. Une classe de modèles variationnels à gradient d'endommagement qui correspond à ce cadre sera explicité. Elle sera mise à profit pour réaliser des simulations de rupture dynamique de matériaux quasi fragiles.

## 2 Formalisme variationnel pour la dynamique des systèmes à dissipation simple : cas des structures élastiques endommageables

On considère un solide élastique occupant un domaine  $\Omega$  (de frontière  $\partial\Omega$ ), sur lequel sont définis les champs de déplacement  $\underline{u}$  et d'endommagement  $d$ . La frontière  $\partial\Omega$  est subdivisée en deux sous-domaines :  $\partial\Omega_u$ , où les déplacements sont prescrits et  $\partial\Omega_T$ , où des forces surfaciques sont appliquées.

### 2.1 Lagrangien modifié pour les systèmes à dissipation simple

Les équations de Lagrange sont traditionnellement utilisées pour modéliser les systèmes conservatifs, c'est-à-dire ceux dont l'évolution peut être entièrement décrite à partir de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle), et donc sans effets dissipatifs. Pour la considération de ces derniers, on s'appuie sur les équations dites de Lagrange généralisées (voir [11], [22], [12]) qui, pour les milieux endommageables décrits à l'aide d'une variable interne scalaire  $d$ , s'écrivent :

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{u}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} = 0 \quad (1)$$

pour l'équation du champ de déplacement  $\underline{u}$  et sa vitesse  $\dot{\underline{u}}$  et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} \delta d - \frac{\partial D}{\partial \dot{d}} \delta \dot{d} = 0 \quad (2)$$

pour la loi d'évolution de l'endommagement.

$\underline{u}$ ,  $\dot{\underline{u}}$  et  $d$  désignant respectivement le champ de déplacement, de vitesse et d'endommagement, le Lagrangien  $\mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}, d)$  est défini comme la différence entre l'énergie cinétique  $K$  et l'énergie potentielle  $V$  du système :

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}, d) = K(\dot{\underline{u}}) - V(\underline{u}, d) \quad (3)$$

avec :

$$K(\dot{\underline{u}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}^2 d\Omega \quad \text{et} \quad V(\underline{u}, d) = W(\underline{u}, d) - W_{ext}(\underline{u}) \quad (4)$$

$$W(\underline{u}, d) = \int_{\Omega} \rho w(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \underline{\nabla} d) d\Omega$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique,  $w$  la densité d'énergie libre et

$$W_{ext}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega + \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u} dS$$

dans lequel  $\rho \underline{f}$  et  $\underline{T}^d$  représentent respectivement les forces de volume et les forces extérieures appliquées.

Dans (2),  $\varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \dot{d}, \underline{\nabla} \dot{d})$  étant le potentiel de dissipation local,  $D$  est sa version globale définie par :

$$D(\dot{\underline{u}}, \dot{d}) = \int_{\Omega} \varphi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \dot{d}, \underline{\nabla} \dot{d}; d, \underline{\nabla} d) d\Omega \quad (5)$$

dans lequel  $d$  et  $\underline{\nabla} d$  apparaissant après la virgule sont des paramètres (et non des arguments) de  $\varphi$  témoignant de l'état du milieu endommagé. En absence d'endommagement, l'équation (1)

correspond à l'équation de Lagrange usuelle, c'est-à-dire à l'équation du mouvement en élastodynamique classique. L'équation (2), quant à elle, est dite de Biot et traduit la loi d'évolution de l'endommagement. La nécessité de prendre en considération les équations complémentaires (2) appelle la recherche d'un Lagrangien modifié permettant de se ramener au formalisme usuel, tout en rendant compte des processus d'endommagement. Dans cette perspective, introduisons la notation condensée  $U = (\underline{u}, d)$  regroupant les champs couplés de déplacement et d'endommagement. En s'inspirant des travaux de [13] et [14]<sup>2</sup>, on postule un Lagrangien modifié sous la forme :

$$\mathcal{L}_d(\dot{U}, U) = \mathcal{L}(\dot{U}, U) - \int_0^t D(\dot{U}) dt' \quad (6)$$

Avec un tel  $\mathcal{L}_d$ , on peut vérifier que (1) et (2) se reformulent sous la forme condensée :

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial U} \right) \delta U = 0 \quad (7)$$

Dans le contexte général des Matériaux Standard généralisés (plasticité, viscoélasticité, endommagement, etc.), la principale difficulté associée à l'expression (6) du Lagrangien modifié,  $\mathcal{L}_d$ , réside dans l'intégration en temps du potentiel global de dissipation. Il s'avère que pour la classe de modèles isotropes à gradient d'endommagement considérés dans la littérature récente et dans la présente étude, on dispose d'une propriété remarquable et caractérisant les systèmes dits à dissipation simples dont la définition proposée par Ehrlacher et Fedelich ([15]) est :

### Proposition 2.1

*Un système caractérisé à l'aide d'un jeu de variables internes  $\alpha$  est dit à dissipation simple si l'énergie totale dissipée jusqu'à l'instant actuel ne dépend que de la valeur des variables d'état  $\alpha$  à cet instant.*

$$\Phi(\alpha) = \int_0^t \varphi(\dot{\alpha}) dt \quad (8)$$

où  $\varphi(\dot{\alpha})$  est le potentiel de dissipation usuel.

L'adaptation au potentiel global  $\mathcal{D}(\underline{\dot{u}}, \dot{d})$  considéré ici concernant les champs  $(\underline{u}, d)$  donne une écriture similaire :

$$\mathcal{D}(\underline{u}, d) = \int_0^t \mathcal{D}(\underline{\dot{u}}, \dot{d}) dt \quad (9)$$

avec

$$\mathcal{D}(\underline{u}, d) = \int_{\Omega} \Phi(\underline{u}, d, \nabla d) d\Omega$$

## 2.2 Principe de moindre action pour les structures élastiques endommageables

En adaptant donc la proposition 2.1 au cas de modèles à gradient d'endommagement, on obtient immédiatement l'expression du Lagrangien modifié :

$$\mathcal{L}_d(\underline{\dot{u}}, \underline{u}, d) = \mathcal{L}(\underline{\dot{u}}, \underline{u}, d) - \mathcal{D}(\underline{u}, d) = K(\underline{\dot{u}}) - V(\underline{u}, d) - \mathcal{D}(\underline{u}, d) \quad (10)$$

$K(\underline{\dot{u}})$  et  $V(\underline{u}, d)$  ayant été définis par (4). Il est intéressant de souligner que ce résultat apporte une justification précieuse à l'utilisation d'un concept de Lagrangien modifié introduit de manière adhoc dans diverses travaux de la littérature (voir par exemple [3],[5], [7]). A nouveau, insistons sur le fait que l'établissement de l'expression (10) du Lagrangien modifié n'a pu être établi que dans le cadre des systèmes à dissipation simple, tels qu'introduits par [15].

Le principe de moindre action pour le milieu élastique endommageable s'écrit alors :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ K(\underline{\dot{u}}) - V(\underline{u}, d) - \mathcal{D}(\underline{u}, d) \right] dt = 0 \quad (11)$$

---

2. , Ces travaux ont été réalisés dans le domaine de l'automatique ou pour des circuits électriques.

On notera que, par construction, les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont les équations du mouvement pour le champ de déplacement  $\underline{u}$ , de l'évolution de l'endommagement, ainsi que des conditions aux limites associées. La condition de stationnarité pour  $d$  donne :

$$\left( \rho \frac{\partial w}{\partial d} + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \right) - \operatorname{div} \left( \rho \frac{\partial w}{\partial \nabla d} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla d} \right) = 0 \quad (12)$$

de même que la condition naturelle au bord pour l'endommagement.

$$\left( \rho \frac{\partial w}{\partial \nabla d} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla d} \right) \cdot \underline{n} = 0 \quad (13)$$

### 3 Un exemple de modèle à gradient d'endommagement en conditions dynamiques

On adopte ici les expressions suivantes des potentiels d'état  $\rho w$  (comme dans les modèles de champ de phase) et de dissipation  $\varphi$  :

$$\rho w(\underline{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2}(1-d)^2 \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}^0 : \underline{\varepsilon} \quad (14)$$

où  $\mathbb{C}^0$  est le tenseur d'élasticité du milieu non endommagé.

$$\varphi(\dot{d}, \nabla \dot{d}; d, \nabla d) = Y_c(d) \dot{d} + 2\ell_0^2 \omega_1 \nabla d \cdot \nabla \dot{d} + I_+(\dot{d}) \quad (15)$$

avec  $I_+(\dot{d})$ , une fonction indicatrice prenant en compte l'irréversibilité de l'endommagement :

$$I_+(\dot{d}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{d} \geq 0 \\ +\infty & \text{si } \dot{d} < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Cette forme du potentiel de dissipation est conforme aux conditions classiquement requises pour les matériaux standard généralisés dont le comportement est indépendant du temps physique. Et, hormis la condition d'irréversibilité, elle conduit à un système à dissipation simple au sens d'Ehrlacher et Fedelich [15], tel que évoqué en sous section 2.1. Le Lagrangien modifié  $\mathcal{L}_d$  correspondant s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{\underline{u}}, \underline{u}, d) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}^2 d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \underline{\varepsilon} + w_1 \ell_0 \left( \frac{\omega(d)}{\ell_0} + \ell_0 \|\nabla d\|^2 \right) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega + \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u} dS \end{aligned} \quad (17)$$

auquel il convient d'ajouter la condition d'irréversibilité (16).

Il s'en suit pour l'expression modifiée (11) du principe de moindre action :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \left[ -\frac{1}{2} \rho \dot{\underline{u}}^2 d\Omega + \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \mathbb{C}(d) : \underline{\varepsilon} + w_1 \ell_0 \left( \frac{\omega(d)}{\ell_0} + \ell_0 \|\nabla d\|^2 \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\partial_T \Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{u} dS \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Les équations gouvernant l'évolution du milieu endommagé, en présence d'effets inertiels, ainsi que celles des conditions aux limites naturelles, se déduisent de ce principe.

**Remarque 1 :** Un résultat notable est la cohérence du principe avec la limite quasi statique. En effet, dans ce dernier cas (nullité de l'énergie cinétique), (18) se réduit à la stationnarité de la fonctionnelle classique (pour les modèles usuels à gradient) qui ne dépend pas explicitement du temps.

**Remarque 2 :** La mise en évidence du Lagrangien modifié pour le modèle d'endommagement à dissipation simple suggère une possible interprétation en terme de modèle d'endommagement non dissipatif mais irréversible (gérée par  $I_+(\dot{d})$ ), tel que récemment discuté dans [20].

## 4 Solution numérique de l'endommagement en dynamique - Illustration

### 4.1 Aspect algorithmique

En ce qui concerne le champ de déplacement, après discrétisation par élément finis, la résolution de l'équation de l'élastodynamique s'appuie classiquement sous la forme suivante :

$$\mathbb{M}\ddot{\underline{u}} + \mathbb{K}\underline{u} = \mathbb{F} \quad (19)$$

où  $\mathbb{M}$  désigne la matrice de masse,  $\mathbb{K}$  la matrice de rigidité, dépendant maintenant de l'état d'endommagement  $d$  et  $\mathbb{F}$  le vecteur des efforts extérieurs appliqués. La résolution temporelle de cette équation est effectuée à l'aide du schéma d'intégration implicite de Newmark. Ce schéma permet de mettre à jour de manière itérative les champs de déplacement  $\underline{u}$ , de vitesse  $\dot{\underline{u}}$  et d'accélération  $\ddot{\underline{u}}$  à chaque pas de temps. Il offre également une bonne stabilité numérique ainsi qu'une précision suffisante. La très bonne performance numérique des intégrateurs de Newmark a pu être expliquée à l'aide d'arguments variationalnels (cf. travaux de Kane et al. [17]). L'algorithme de Newmark pour l'endommagement en dynamique se résume comme suit.

---

**Algorithm 1** Mise en oeuvre numérique du problème d'endommagement en conditions dynamiques

---

**Input :** (conditions initiales) :  $\underline{u}_0$  et  $\mathbb{F}_0$

**Output :**  $\{\underline{u}_n, d_n\}$  à  $t = t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_N = t_f$

1 Calcul de l'accélération à partir des données initiales  $\ddot{\underline{u}}_0 : \mathbb{M}\ddot{\underline{u}}_0 + \mathbb{K}\underline{u}_0 = \mathbb{F}_0$

for  $n \geq 0$  do

2 repeat

$$\dot{\underline{u}}_{n+1}^P = \dot{\underline{u}}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\underline{u}}_n$$

$$\underline{u}_{n+1}^P = \underline{u}_n + \Delta t\dot{\underline{u}}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}(1 - 2\beta)\ddot{\underline{u}}_n$$

$$(\mathbb{M} + \beta \Delta t^2 \mathbb{K})\ddot{\underline{u}}_{n+1} = \mathbb{F}_{n+1} - \mathbb{K}\underline{u}_{n+1}^P$$

$$\dot{\underline{u}}_{n+1} = \dot{\underline{u}}_{n+1}^P + \Delta t\gamma\ddot{\underline{u}}_{n+1}$$

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_{n+1}^P + \Delta^2 t\beta\ddot{\underline{u}}_{n+1}$$

$$d_{n+1} = \text{Arg min}_d I_n(\underline{u}, d)$$

3 until une certaine tolerance;

4 end

---

Pour le problème de minimisation en endommagement, des éléments finis linéaires de Lagrange (c'est-à-dire des éléments CG1) et le *PETScTAOSolver* de DOLFIN sont utilisés.

### 4.2 Etude numérique d'une plaque préfissurée sollicitée en traction dynamique

La configuration géométrique étudiée est celle de la figure suivante : la plaque, rectangulaire, est de longueur  $L = 100 \text{ mm}$  et de hauteur  $H = 40 \text{ mm}$  ; elle comporte une fissure initiale de longueur  $a = 50 \text{ mm}$ , centrée et débouchante sur le bord  $x_1 = 0$ , et située à  $x_2 = 20 \text{ mm}$ . Elle est soumise à une traction constante appliquée sur ses bords supérieur  $x_2 = H$  et inférieur  $x_2 = 0$ .

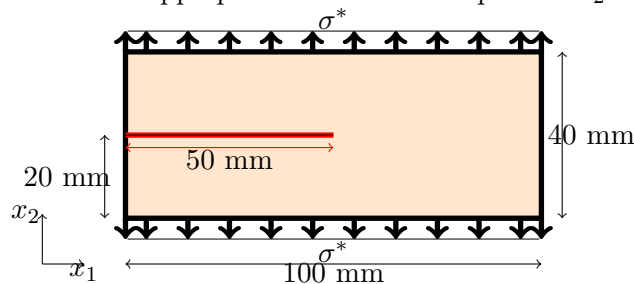


FIGURE 1 – Plaque rectangulaire préfissurée soumise à une traction constante

Les données matériaux (cf. [4]) pour la simulation sont : Module d'Young  $E = 32GPa$  ; Coefficient de poisson  $\nu = 0.2$  ; Taux de restitution d'énergie critique  $G_c = 0.003N/mm$  ; Densité volumique  $\rho = 2450kg/m^3$  ; Energie seuil d'endommagement  $w_1 = 0.006 N/mm^2$ . Ces données conduisent à une valeur  $\ell_0 = 0.25 mm$  pour la longueur interne dans un modèle d'endommagement du type AT2 ( $w(d) = d^2$ ). Le pas de temps choisi pour la simulation est  $\Delta t = 8.10^{-7} s$  et la taille du maillage est  $h = 0.1 mm$  (soit 2 fois et demie plus petite que la longueur interne  $\ell_0$ ). Pour la simulation dynamique, les paramètres numériques  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  ont été choisis. La figure 2 illustre la propagation de la fissure dans la plaque, respectivement à  $t = 53 \mu s$  correspondant au branchement de la fissure et à  $t = 90 \mu s$ . La fissure initiale se propage horizontalement sur une certaine distance avant de se séparer en deux branches. Ceci est conforme aux observations reportées dans la littérature (cf. par exemple [3], [4]). Après le branchement, les deux fissures secondaires se propagent progressivement vers les bords supérieur et inférieur de la plaque, soumise à la traction, avec un angle d'ouverture d'un peu plus de 60 degrés.

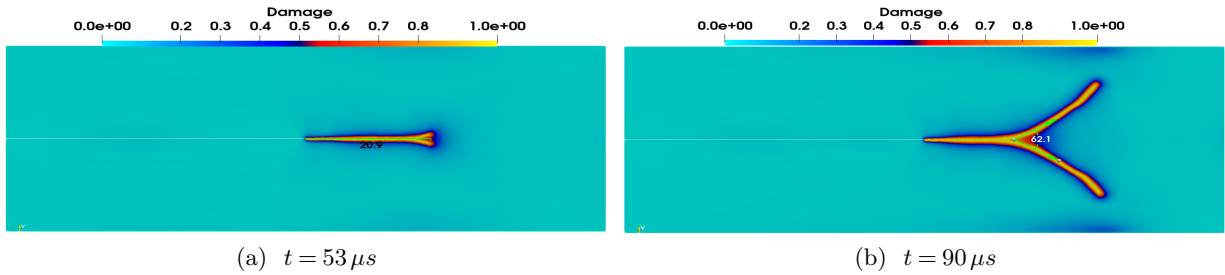


FIGURE 2 – Cartes de la propagation de la fissure pour le modèle AT2 : (a) Début de branchement, (b) à  $t = 90 \mu s$

La figure 3 illustre la distribution spatiale de la contrainte hydrostatique. Le champ de contrainte présente une forte localisation à la pointe de la fissure (zone d'endommagement  $d = 1$ ) à partir de celle-ci. On notera que l'évolution de la fissure est qualitativement similaire à celle rapportée par [4] pour la formulation AT2.

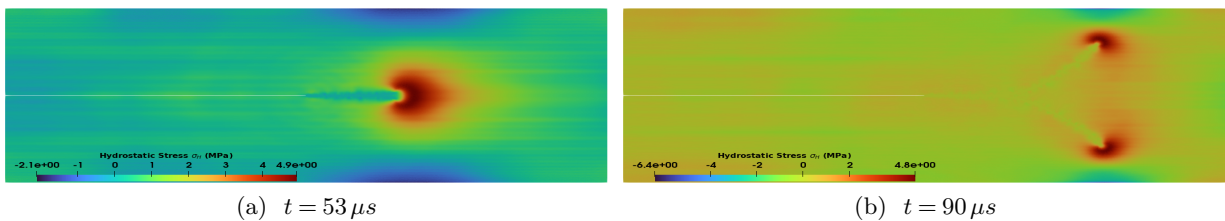


FIGURE 3 – Contrainte hydrostatique  $\sigma_H = 0,5(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

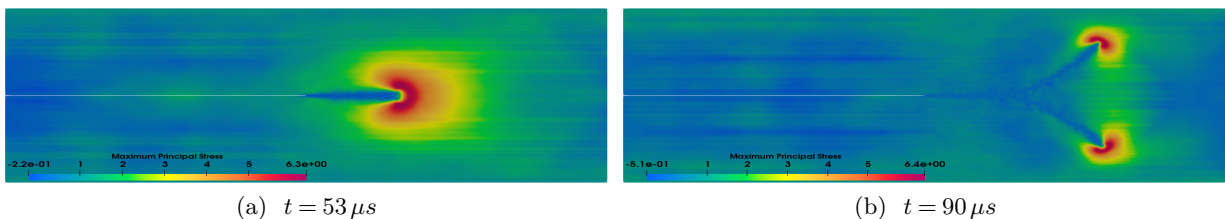


FIGURE 4 – Contrainte principale maximale

Les vitesses de relevées lors de la propagation de la fissure environ 1000 m/s (juste avant le branchement), soit environ  $0,5CR^3$ , la vitesse de Rayleigh étant de l'ordre de 2100 m/s. La figure 4 représente la distribution de la contrainte principale majeure dans la plaque. Il est intéressant de noter qu'outre la forte concentration de cette contrainte principale en front de fissure, on note l'existence de plusieurs zones de compression (néanmoins faible). S'agissant des

3. cette valeur est légèrement en dessous celles reportées par Mandal et al. qui ont néanmoins choisi considérer comme pointe de fissure le point à  $d = 0.85$

champs de déplacements horizontaux  $u_x$  et verticaux  $u_y$ , illustrés sur les figures 5a et 5d et les figures 5c et 5d, il est intéressant de noter l'existence de sauts de déplacements le long de la fissure y compris sur les parties propagées via le modèle d'endommagement.

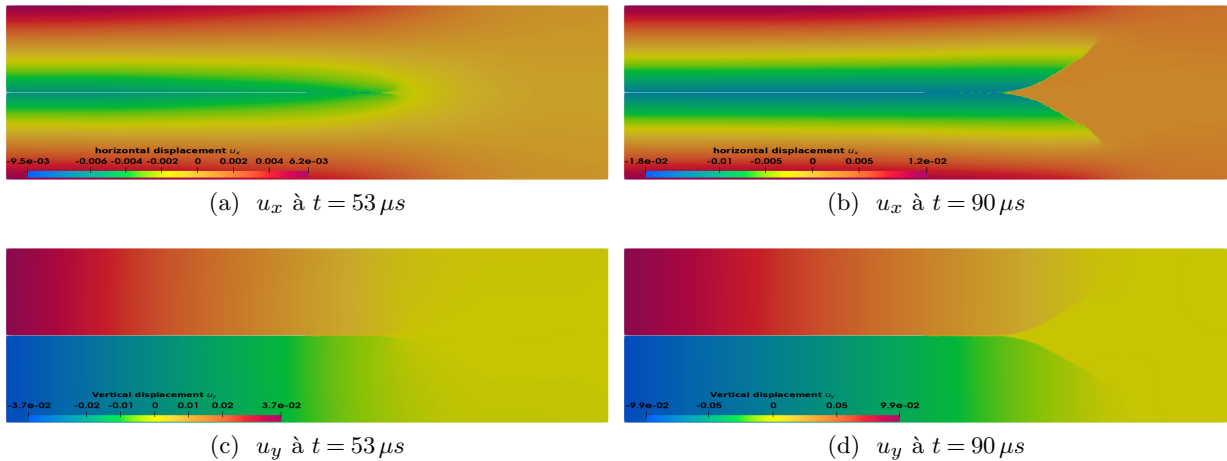


FIGURE 5 – Champ de déplacement horizontal  $u_x$  et vertical  $u_y$

## 5 Conclusion

Un cadre cohérent de modélisation de l'endommagement et la rupture en régime dynamique est proposé, en s'appuyant sur les équations de Lagrange généralisées (incluant celles régissant les lois d'évolution de l'endommagement). Ceci a permis de mettre en évidence un Lagrangien modifié dont le domaine de validité correspond aux systèmes à dissipation simple. La principe de moindre action a pu être ainsi étendu à une large classe de milieux endommageables en tirant profit du Lagrangien modifié. De façon cohérente, les équations d'Euler-Lagrange associées incluent l'évolution de l'endommagement. La résolution a été réalisée à l'aide d'un schéma Newmark, combiné à une minimisation pour l'endommagement. Enfin, des simulations numériques ont été menées sur une plaque préfissurée soumise à un chargement dynamique constant, ce qui a permis d'illustrer la capacité du modèle à prédire l'initiation et la propagation des fissures avec des possibilités de branchement. Une autre variante de la modélisation, AT1, est également disponible et ses prédictions seront présentées dans la communication orale. Enfin, une part de la communication orale sera consacrée au test bien connu de Kalthoff en rupture dynamique.

## Références

- [1] Bourdin, Blaise and Francfort, Gilles A and Marigo, Jean-Jacques Numerical experiments in revisited brittle fracture, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 797-826, 2000.
- [2] Marigo, Jean-Jacques and Maurini, Corrado and Pham, Kim An overview of the modelling of fracture by gradient damage models, Meccanica, Springer, 3107-3128, 2016.
- [3] Borden, Michael J and Verhoosel, Clemens V and Scott, Michael A and Hughes, Thomas JR and Landis, Chad M A phase-field description of dynamic brittle fracture, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 77-95, 2012.
- [4] Mandal, Tushar Kanti and Nguyen, Vinh Phu and Wu, Jian-Ying Evaluation of variational phase-field models for dynamic brittle fracture, Engineering Fracture Mechanics, Elsevier, 107169, 2020.
- [5] Li, Tianyi and Marigo, Jean-Jacques and Guilbaud, Daniel and Potapov, Serguei Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 1381-1405, 2016.

- [6] Bleyer, Jérémy and Roux-Langlois, Clément and Molinari, Jean-François Dynamic crack propagation with a variational phase-field model : limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms, *International Journal of Fracture*, Springer, 79–100, 2017.
- [7] Geromel Fischer, Arthur and Marigo, Jean-Jacques Gradient damage models applied to dynamic fragmentation of brittle materials, *Int. Journal of Fract.*, Springer, 143–165, 2019.
- [8] Mersel, Lamia and Bouda, Pascal and Germain, Jérémy and Réthoré, Julien Dynamic damage modelling through phase-field approaches : Assessment, critical analysis and comparison, *Comptes Rendus. Mécanique*, 687–724, 2025.
- [9] Rayleigh On progressive waves, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, 21–26, 1877.
- [10] J. W. Leech. Classical mechanics : (Methuen’s monographs on phys. subjects, Springer, 1970.
- [11] Biot, Maurice Anthony A virtual dissipation principle and Lagrangian equations in non-linear irreversible thermodynamics, *Bulletins de l’Académie Royale de Belgique, Persée-Portail des revues scientifiques en SHS*, 6–30, 1975.
- [12] Stolz, Claude Energy methods in non-linear mechanics, *Centre of Excellence for Advanced Materials and Structures*, 2004.
- [13] Ortega, Romeo and Loria, Antonio and Nicklasson, Per Johan and Sira-Ramirez, Hebertt and Ortega, Romeo and Loría, Antonio and Nicklasson, Per Johan and Sira-Ramírez, Hebertt Euler-Lagrange systems, Springer, 1998.
- [14] Pniak, Lucas Vers une modélisation électromagnétique exhaustive et rapide du transformateur planaire par le principe de moindre action. Application à la conception d’un convertisseur isolé modulaire répondant aux contraintes aéronautiques, Sorbonne Université, 2023.
- [15] Ehrlacher, A Principe d’extremum et equation en vitesse pour les systemes a dissipation simple 7e Congrès Fr, Meca, 1985.
- [16] Kpotufe, Kossivi and Abdelmoula, Radhi and Pindra, Nadjime and Kondo, Djimédo Sur deux classes de modèles à gradient d’endommagement : cadre thermodynamique, formulation variationnelle et applications, 15ème colloque national en calcul des structures, 2022.
- [17] Kane, Couro and Marsden, Jerrold E and Ortiz, Michael and West, Matthew Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems, *International Journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, 1295–1325, 2000.
- [18] Winkler, Bernhard Josef Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton, Innsbruck University Press, 2001.
- [19] Chu, Dongyang and Li, Xiang and Liu, Zhanli Study the dynamic crack path in brittle material under thermal shock loading by phase field modeling, *International Journal of Fracture*, Springer, 115–130, 2017.
- [20] Favrie, Nicolas and Renaud, Adrien and Kondo, Djimédo Hyperbolic modeling of gradient damage and one-dimensional finite volume simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, 116643, 2024.
- [21] E. Lorentz and S. Andrieux A variational formulation for nonlocal damage models, *International Journal of Plasticity*, 119-138, 1999.
- [22] Stolz, C. Sur les equations generales de la dynamique des milieux continus anelastiques, *CR Acad. Sci. Serie II*, Elsevier, 1997–2000, 1988