

# Sur la méthode de décomposition de domaine mixte basée sur la méthode LATIN pour les problèmes de contacts frottants

P.-A. Guidault<sup>1</sup>, D. Zeka<sup>2</sup>, D. Néron<sup>1</sup>, M.L.E. Guiton<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France, {pierre-alain.guidault,david.neron}@ens-paris-saclay.fr

<sup>2</sup> Arts et Métiers Institute of Technology, CNRS, Bordeaux INP, Hesam Université, I2M, UMR 5295, 33400 Talence, France, donald.zeka@ensam.eu

<sup>3</sup> IFP Energies nouvelles, Solaize, France, martin.guigon@ifpen.fr

**Résumé** — La méthode de décomposition de domaine mixte basée sur la méthode LATIN s'appuie sur un algorithme de résolution à directions alternées très similaire aux algorithmes de type Uzawa. À la différence d'un solveur non-linéaire incrémental classique, elle s'appuie sur une formulation globale espace-temps qui en fait une méthode particulièrement adaptée pour les techniques de réduction de modèle de type PGD en variables d'espace et du temps. Son application à des problèmes de structures en quasi-statique impliquant un nombre important de surfaces de contacts frottants est ici présentée.

**Mots clés** — DDM, méthode LATIN, PGD, calcul multiéchelle, lagrangien augmenté, contact frottant.

## 1 Introduction

La simulation de matériaux architecturés tels que des câbles spiralés monotoron ou les conducteurs électriques impliquant de multiples interactions de contact frottant est probablement l'un des problèmes les plus difficiles en calcul des structures. Les problèmes de contact par friction sont caractérisés par de fortes non-linéarités et des comportements non réguliers, qui peuvent engendrer des coûts de calcul prohibitifs, en particulier pour des chargements complexes dépendants du temps et des études paramétriques. Les méthodes d'accélération ou de parallélisation sont donc une nécessité pour résoudre ce problème telles que les méthodes multigrilles [1] ou les méthodes de décomposition de domaine (DDM) [2, 3]. Parmi les DDM mixtes, on trouve celle basée sur le solveur non linéaire LARge Time INcrement (LATIN) [4] appliquée aux problèmes de contact quasistatiques [5, 6].

Une autre approche pour réduire le coût de calcul consiste à utiliser des techniques de réduction de modèle. Pour les problèmes de contact, la plupart des techniques de réduction de modèle reposent sur des méthodes *a posteriori*, principalement pour les problèmes paramétriques sans frottement avec un petit nombre d'interfaces de contact [7, 8]. Cependant, une base réduite prédéterminée peut ne pas être en mesure de capturer efficacement, avec suffisamment de précision, les phénomènes multiéchelles non réguliers et propagatifs qui se produisent aux interfaces de contact. Aussi, comme souligné dans [9], il peut être avantageux de proposer une méthode de réduction de modèle *a priori* combinée à une approche multiéchelle pour les problèmes de ce type.

Dans cette présentation, l'efficacité de la méthode DDM mixte multiéchelle basée sur la méthode LATIN avec PGD (*Proper Generalized Decomposition*) [10, 11] est étudiée dans le cas de problèmes impliquant des interfaces de contact multiples et de grande taille, où les conditions de contact ont un effet important à l'échelle globale [12]. La formulation spatio-temporelle globale de la méthode permet d'utiliser la réduction de modèle basée sur le PGD pendant les calculs, créant et enrichissant à la volée des bases réduites par sous-domaine afin de mieux suivre les fronts de glissement et les phénomènes de propagation. Le problème grossier de la DDM permet de capturer efficacement dès les premières itérations le comportement global du problème, permettant ainsi la construction de bases réduites par sous-domaine pertinentes pour représenter le comportement local au niveau des interfaces de contact.

Les caractéristiques les plus importantes de l'approche sont ici présentées ainsi que certains développements récents visant à améliorer les performances. En particulier, un indicateur de convergence indépendant des directions de recherche est proposé afin qu'il soit représentatif d'un niveau d'erreur sur les quantités de contact. Le taux de convergence étant dépendant des directions de recherche dans ce type

d'algorithme à direction alternées, une méthode de mise à jour des paramètres de directions de recherche efficace et peu coûteuse est proposée afin d'améliorer la convergences des quantités d'interface à l'échelle micro [13]. Des lignes directrices sont également fournies pour choisir les paramètres de la stratégie, en particulier ceux permettant de construire des bases réduites par sous-domaine de taille contrôlée sans avoir recours à des techniques coûteuses de tri. La robustesse et l'efficacité de la stratégie sont illustrées à travers des problèmes de contact frottant bidimensionnels avec des chargements complexes.

## 2 La DDM mixte basée sur la LATIN pour les problèmes de contact

La stratégie comprend trois éléments principaux : une décomposition du problème en sous-structures et interfaces, l'introduction de l'aspect multiéchelle au niveau des interfaces, et l'algorithme LATIN [4], solveur itératif non incrémental à deux directions de recherche alternées.

### 2.1 Sous-domaines et interfaces

On s'intéresse à l'équilibre d'un assemblage de sous-domaines élastiques linéaire en interactions de contact frottant dans un état quasi-statique isotherme sous l'hypothèse des petites perturbations (et petits glissements), occupant le domaine spatial  $\Omega$  sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Un sous-domaine est soumis à une force de volume  $\underline{f}_d$ , des efforts surfaciques imposés  $\underline{F}_d$  sur une partie de son bord  $\partial_2\Omega$  et des déplacements imposés  $\underline{U}_d$  sur une partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ . L'assemblage est décomposé en une liste  $\mathbf{E}$  de sous-domaines sans recouvrement  $\Omega_E$  en interaction avec l'ensemble de ses voisins  $\mathbf{V}_E$  à travers ses efforts et déplacements d'interface, resp.  $\underline{F}_E$  et  $\underline{W}_E$  (**Figure 1**). Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-

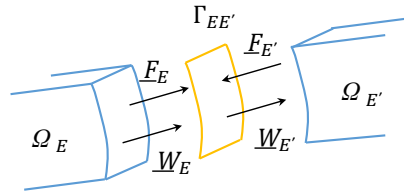


FIGURE 1 – Sous-domaine  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  interagissant à travers l'interface  $\Gamma_{EE'}$ .

domaines  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  transfère des champs de déplacement et d'effort  $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$  et  $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$  restraints à  $\Gamma_{EE'}$  et appartiennent aux espaces  $\mathcal{W}^{[0,T]}$  et  $\mathcal{F}^{[0,T]}$  définis sur  $\Gamma_{EE'} \times [0, T]$ . L'aspect mixte de la stratégie permet de considérer divers comportements d'interface : parfait, contact frottant, déplacement imposé, effort imposé... Cette relation de comportement est notée de façon formelle comme suit :

$$\mathbf{b}_{EE'}(\underline{F}_E, \underline{W}_E, \underline{F}_{E'}, \underline{W}_{E'}) = \mathbf{0}, \forall (\underline{x}, t) \in \Gamma_{EE'} \times [0, T]. \quad (1)$$

Champs de déplacement et tenseur des contraintes de Cauchy d'un sous-domaine sont notés,  $\underline{u}_E$  et  $\sigma_E$  respectivement. L'état d'un sous-domaine  $\Omega_E$  est défini par  $\mathbf{s}_E = (\underline{u}_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E)$ , et  $\mathbf{s}_E$  est dit *E-admissible* si il vérifie l'admissibilité cinématique  $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{E,ad}^{[0,T]}$ , l'admissibilité statique  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{E,ad}^{[0,T]}$  et la relation de comportement élastique linéaire  $\sigma_E = \mathbf{K} : \varepsilon_E(\underline{u}_E)$ , avec  $\mathbf{K}$  le tenseur de Hooke.

### 2.2 Séparation des échelles au niveau des interfaces

Déplacements et efforts d'interface sont décomposés de façon additive en  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^M + \mathbf{s}^m$  (avant toute discrétisation) avec  $\mathbf{s}^M$  la partie macroscopique et  $\mathbf{s}^m$  la partie microscopique. Les espaces macroscopiques  $\mathcal{F}^{[0,T],M}$  et  $\mathcal{W}^{[0,T],M}$  des efforts et déplacements macroscopiques sont choisis tels que la forme bilinéaire travail ne soit pas dégénérée. Les parties macroscopiques sont telles que la propriété suivante de découplage des travaux micro et macro soit vérifiée :

$$\int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F} \cdot \underline{W} dS dt = \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M dS dt + \int_{\Gamma_{EE'} \times [0,T]} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m dS dt.$$

Les quantités micro sont ainsi définies par :  $\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M$  and  $\underline{W}^m = \underline{W} - \underline{W}^M$ . Un choix classique d'espace macroscopique pour une interface est un espace généré par une base macro affine  $\{\underline{e}_i^M(\underline{x})\}_{i=1,\dots,n_M}$  (avec  $n_M = 4$  en 2D et  $n_M = 9$  en 3D), qui contient ainsi au moins la base des modes rigides pour un déplacement d'une interface  $\partial\Omega_E$  et ce afin que la stratégie soit numériquement extensible. Ainsi, une quantité macro  $\underline{s}^M$  sur l'interface  $\Gamma_{EE'}$  s'écrit  $\underline{s}^M = \sum_{i=1}^{n_M} (\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{s} \cdot \underline{e}_i^M(\underline{x}) dS) \underline{e}_i^M(\underline{x})$ . Le problème grossier de la DDM est un problème réduit d'interface qui vise à satisfaire l'équilibre au sens macroscopique [11]. Ainsi, les efforts macroscopiques (ainsi que la partie macroscopiques des conditions limites en effort) doivent appartenir à l'espace d'admissibilité suivant :

$$\mathcal{F}_{\text{ad}}^{[0,T],M} := \left\{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}^{[0,T],M} \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = \underline{0} \right\}. \quad (2)$$

### 2.3 La méthode LATIN : un schéma itératif à directions alternées

On note  $\mathbf{A}_d^{[0,T]}$ , une variété sur les solutions  $\underline{s}$  définies par les équations linéaires, éventuellement globales du problème, à savoir la  $E$ -admissibilité et l'admissibilité des efforts macro (voir (2)). On note  $\Gamma^{[0,T]}$  la variété des solutions  $\hat{\underline{s}}$  vérifiant les relations de comportement des interfaces  $\underline{b}_{EE'} = \underline{0}$ . Le schéma itératif consiste à itérer à l'aide de deux directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$  entre les variétés  $\mathbf{A}_d^{[0,T]}$  et  $\Gamma^{[0,T]}$  en alternant une *étape locale* et une *étape linéaire* (voir le schéma **Figure 2**) :

$$\underline{s}_0 \in \mathbf{A}_d^{[0,T]} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{s}_n \in \mathbf{A}_d^{[0,T]} \xrightarrow[\mathbf{E}^+]{\text{étape loc.}} \hat{\underline{s}}_{n+1/2} \in \Gamma^{[0,T]} \xrightarrow[\mathbf{E}^-]{\text{étape lin.}} \underline{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d^{[0,T]} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{s}_{\text{exact}} \in \mathbf{A}_d^{[0,T]} \cap \Gamma^{[0,T]}$$

On notera que les étapes linéaire et locale impliquent la résolution de problèmes spatio-temporels.

#### 2.3.1 Étape locale à l'itération $n+1$

Cette étape consiste à déterminer  $\hat{\underline{s}}_{n+1/2} \in \Gamma^{[0,T]}$  connaissant  $\underline{s}_n \in \mathbf{A}_d^{[0,T]}$  issu de l'étape linéaire précédente et suivant la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ . Ainsi, pour chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ , en omettant les indices  $n$  et  $n+1/2$  pour alléger les notations, on doit résoudre le problème local spatio-temporel suivant :

**Problème 1 (Étape locale)** Trouver  $\hat{\underline{s}} = \{\hat{\underline{s}}_E\}_{E \in \mathbf{E}} \in \Gamma^{[0,T]}$  vérifiant,  $\forall \underline{x} \in \Gamma_{EE'}$  et  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\left\| \begin{array}{l} - \text{le comportement d'interface : } \underline{b}_{EE'}(\widehat{\underline{W}}_E, \widehat{\underline{W}}_{E'}, \widehat{\underline{F}}_E, \widehat{\underline{F}}_{E'}) = \underline{0} \\ - \text{la direction de recherche } \mathbf{E}^+ : \begin{cases} \widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E - \mathbf{k}^+(\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) = \underline{0} \\ \widehat{\underline{F}}_{E'} - \underline{F}_{E'} - \mathbf{k}^+(\widehat{\underline{W}}_{E'} - \underline{W}_{E'}) = \underline{0} \end{cases} \end{array} \right.$$

Le paramètre de direction de recherche  $\mathbf{k}^+$  est un opérateur local, symétrique, défini positif. On montre que la résolution de cette étape locale est explicite dans les cas suivants :

■ **Condition limite de déplacement ou effort imposé** : Pour un déplacement  $\underline{U}_d$  imposé sur  $\Gamma_{E,1} = \partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega$  ou un effort  $\underline{F}_d$  imposé sur  $\Gamma_{E,2} = \partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega$ , on obtient respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\underline{W}}_E = \underline{U}_d \\ \widehat{\underline{F}}_E = \underline{F}_E + \mathbf{k}^+(\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\underline{F}}_E = \underline{F}_d \\ \widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E + \mathbf{k}^+(\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) \end{array} \right.$$

Afin d'améliorer la prise en compte au sens de la pénalisation des conditions limites dès l'initialisation, une grande (resp. petite) valeur pour  $\mathbf{k}^+$  pour un déplacement (resp. effort) imposé est choisie. Il est important de noter qu'à convergence les conditions limites sont néanmoins satisfaites de façon exacte.

■ **Interface parfaite** : La continuité des déplacements  $\widehat{\underline{W}}_E = \widehat{\underline{W}}_{E'}$  et l'équilibre des efforts  $\widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{F}}_{E'} = \underline{0}$  conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\underline{W}}_E = \widehat{\underline{W}}_{E'} = \frac{1}{2}(\underline{W}_E + \underline{W}_{E'} - \mathbf{k}^{+-1}(\underline{F}_E + \underline{F}_{E'})) \\ \widehat{\underline{F}}_E = -\widehat{\underline{F}}_{E'} = \underline{F}_E + \mathbf{k}^+(\widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E) \end{array} \right.$$

■ **Interface de contact frottant** : Il est classique dans ce cas de décomposer  $\mathbf{k}$  en ses parties normale et tangentielle comme suit :  $\mathbf{k}^+ = k_N^+ \mathbf{P}_N + k_T^+ \mathbf{P}_T$  où  $\mathbf{P}_N = \underline{n} \otimes \underline{n}$  est le projecteur suivant la normale de contact  $\underline{n}$  et  $\mathbf{P}_T = \mathbf{I}_d - \mathbf{P}_N$  est le projecteur tangentiel. Sous l'hypothèse de petits glissements et une formulation

Contact normal	
<b>■ Séparation</b> : $C_N > 0$ $\widehat{\underline{F}}_E = \widehat{\underline{F}}_{E'} = \underline{0}$	<b>■ Contact</b> : $C_N \leq 0$ $\widehat{\underline{F}}_E \cdot \underline{n} = -\widehat{\underline{F}}_{E'} \cdot \underline{n} = C_N$
Comportement tangentiel : si $C_N \leq 0$	
<b>■ Adhérence</b> : $\ \underline{C}_T\  < f C_N $ $\mathbf{P}_T \widehat{\underline{F}}_E = -\mathbf{P}_T \widehat{\underline{F}}_{E'} = \underline{C}_T$	<b>■ Glissement</b> : $\ \underline{C}_T\  \geq f C_N $ $\mathbf{P}_T \widehat{\underline{F}}_E = -\mathbf{P}_T \widehat{\underline{F}}_{E'} = f C_N  \frac{\underline{C}_T}{\ \underline{C}_T\ }$

TABLE 1 – Résolution de l'étape locale pour une interface de contact frottant.

de la vitesse de glissement tangentielle en incrément de déplacement, on obtient la **Table 1** où les deux indicateurs suivants ont été introduits :

$$C_N = \frac{1}{2}k_N^+ g_N + \widehat{\underline{F}}_E \cdot \underline{n} = \frac{1}{2}k_N^+ [(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \underline{n} + g_0] + (\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) \cdot \underline{n} \quad (3)$$

$$\underline{C}_T = \frac{1}{2}k_T^+ \delta \underline{g}_T + \mathbf{P}_T \widehat{\underline{F}}_E = \frac{1}{2}k_T^+ \left[ \mathbf{P}_T (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) - \underline{g}_T (t - \delta t) \right] + \mathbf{P}_T (\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) \quad (4)$$

où  $g_N$  est le saut de déplacement normal,  $g_0$  le saut normal initial,  $\underline{g}_T = \mathbf{P}_T (\widehat{\underline{W}}_{E'} - \widehat{\underline{W}}_E)$  le saut tangentiel,  $\delta \underline{g}_T = \underline{g}_T(t) - \underline{g}_T(t - \delta t)$  l'incrément de saut de déplacement tangentiel entre les instants  $t$  et  $t - \delta t$  et  $f$  est le coefficient de frottement. On notera que  $\underline{C}_T$  dépendant de  $\delta \underline{g}_T$ , il doit être évalué pas de temps par pas de temps. On en déduit alors les déplacements d'interface à l'aide de la direction de recherche :

$$\widehat{\underline{W}}_E = \underline{W}_E + \mathbf{k}^{+-1} (\widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E) \quad \text{et} \quad \widehat{\underline{W}}_{E'} = \underline{W}_{E'} + \mathbf{k}^{+-1} (\widehat{\underline{F}}_{E'} - \underline{F}_{E'}). \quad (5)$$

Le taux de convergence de la stratégie est largement piloté par la valeur des paramètres de direction de recherche. Si une valeur quasi optimale peut être proposée pour les interfaces parfaites ( $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \frac{E}{L_\Gamma} \mathbf{I}_d = \mathbf{k}_0$  avec  $E$  le module de Young et  $L_\Gamma$  une dimension caractéristique de l'interface), cela s'avère plus difficile pour les interfaces de contact frottant, car l'optimalité dépend fortement des conditions de contact évoluant en espace et en temps en particulier dans le cas de chargements extérieurs complexes. Les travaux présentés dans [15] constituent une première tentative d'amélioration des performances pour une formulation par lagrangien augmenté des conditions de contact (sans frottement). Une autre tentative est la méthode lagrangienne augmentée adaptée de [16] pour le contact frottant. Les travaux de [13] tirent parti de la caractéristique unique de la méthode LATIN qui génère une vue spatio-temporelle complète de l'état du contact à chaque itération, en proposant une stratégie de mise à jour des directions de recherche qui préserve la stabilité de l'algorithme de solution global dans le temps tout en permettant une accélération de convergence significative. Afin de pouvoir conserver les opérateurs à l'étape linéaire constants et de pouvoir les précalculer, la direction de recherche  $\mathbf{k}^-$  est choisie constante et égale à  $\mathbf{k}_0$ . Seule la direction de recherche de l'étape locale  $\mathbf{k}^+$  est mise à jour en variable d'espace et du temps en fonction du statut de contact. Ainsi, pour une interface de contact  $\Gamma_{EE'}$ , en partant d'une valeur de référence  $\mathbf{k}^+ = k_0 \mathbf{I}_d$ , la direction de recherche  $\mathbf{k}^+ = k_N^+ \mathbf{P}_N + k_T^+ \mathbf{P}_T$  est mise à jour en espace et en temps, avec  $\alpha \in [0, 1]$ , comme suit :

- **Séparation** :  $\mathcal{N}(\underline{x}, t) := C_N(\underline{x}, t) > 0$  alors  $k_N^+(\underline{x}, t) = k_T^+(\underline{x}, t) = k_0(1 - \alpha)$ ;
- **Glissement** :  $\mathcal{N}(\underline{x}, t) \leq 0$  et  $\mathcal{T}(\underline{x}, t) := \|\underline{C}_T(\underline{x}, t)\| - f|C_N(\underline{x}, t)| \geq 0$  alors  $k_T^+(\underline{x}, t) = k_0(1 - \alpha)$ .

Ainsi, si un décollement/séparation ou un glissement est détecté en un point et un instant donné, la direction de recherche normale et/ou tangentielle est diminuée par le coefficient  $\alpha$  afin de permettre un décollement et/ou glissement « plus aisé ». En pratique, une valeur de  $\alpha$  raisonnable est choisie afin de ne pas diverger. En cas de divergence, le paramètre de relaxation de l'algorithme (voir (9)) peut-être facilement ajusté. Pour chaque interface, la mise à jour est effectuée selon un critère de stagnation entre les itérations  $n - 1$  et  $n$  comme suit :

$$I_N = \frac{\|\mathcal{N}_n - \mathcal{N}_{n-1}\|_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]}}{\|\mathcal{N}_{n-1}\|_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]}} < I_0, \quad I_T = \frac{\|\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n-1}\|_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]}}{\|\mathcal{T}_{n-1}\|_{\Gamma_{EE'} \times [0, T]}} < I_0 \quad (6)$$

En pratique, une seule mise à jour est suffisante dès que les statuts de contact ont convergé. Le problème grossier ou macroscopique d'interface (voir **Problème 3** en **Section 2.3.2**) permettant une convergence

rapide des statuts de contact, une seule mise à jour (avec  $I_0 = 0.1$ ,  $\alpha = 1/3$  et  $\mu = 0.8$ ) au bout de quelques itérations LATIN est suffisante en pratique afin d'améliorer la vitesse de convergence des quantités micro.

### 2.3.2 Étape linéaire à l'itération $n + 1$

Elle consiste à déterminer  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d^{[0,T]}$  connaissant  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma^{[0,T]}$  issu de l'étape locale précédente et suivant la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ . Pour chaque sous-domaine  $E \in \mathbf{E}$ , on résout le problème spatio-temporel suivant :

**Problème 2 (Problème micro d'un sous-domaine)** Trouver  $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{E,\text{ad}}^{[0,T]}$  tel que,  $\forall (\underline{u}^*, \underline{W}^*) \in \mathbf{E}_{E,\text{ad}}^{[0,T]}$ ,

$$\int_{\Omega_E \times [0,T]} \varepsilon(\underline{u}_E) : \mathbf{K} : \varepsilon(\underline{u}^*) d\Omega dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \mathbf{k}^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}^* dS dt = \int_{\Omega_E \times [0,T]} \underline{f}_{-d|\Omega_E} \cdot \underline{u}^* d\Omega dt + \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \left( \hat{\underline{F}}_E + \mathbf{k}^- (\hat{\underline{W}}_E + \tilde{\underline{W}}_E^M) \right) \cdot \underline{W}^* dS dt,$$

avec  $\underline{F}_E = \hat{\underline{F}}_E + \mathbf{k}^- (\hat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E + \tilde{\underline{W}}_E^M)$ .

Le multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\underline{W}}^M = \{\tilde{\underline{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}}$  appartient à l'espace  $\mathcal{W}_{\text{ad},0}^{[0,T],M}$  des déplacements macroscopiques continus aux interfaces et nuls sur  $\partial_1\Omega$ . Il permet d'exprimer l'équilibre des efforts macroscopiques d'interface ( $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{\text{ad}}^{[0,T],M}$ , voir (2)) au sens faible. Le **Problème 2** étant linéaire, il est en effet possible de définir l'opérateur homogénéisé pour chaque sous-domaine  $E$  comme suit :

**Proposition 1** Si  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{k}^-$  sont symétriques, définis positifs, alors le **Problème 2** défini sur  $\Omega_E$  et sa frontière  $\partial\Omega_E$  admet une solution unique telle que :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\tilde{\underline{W}}_E^M) + \hat{\underline{F}}_{E,d}^M, \quad (7)$$

où  $\tilde{\underline{W}}_E^M \in \mathcal{W}_E^{[0,T],M}$ ,  $\hat{\underline{F}}_{E,d}^M$  dépend de  $\underline{f}_{-d|\Omega_E}$  et  $\hat{\mathbf{s}}_E$  et  $\mathbf{L}_E^F$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{W}_E^{[0,T],M}$  vers  $\mathcal{F}_E^{[0,T],M}$ .

Dans le cas où les opérateur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{k}^-$  sont constants, l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  est déterminé une fois pour toute à l'initialisation du processus itératif. Ainsi, le multiplicateur  $\tilde{\underline{W}}^M = \{\tilde{\underline{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}}$  peut être déterminé en résolvant le problème macroscopique (ou grossier) suivant :

**Problème 3 (Problème macro)** Trouver  $\tilde{\underline{W}}^M = \{\tilde{\underline{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{\text{ad},0}^{[0,T],M}$  tel que,  $\forall \tilde{\underline{W}}^{M*} \in \mathcal{W}_{\text{ad},0}^{[0,T],M}$ ,

$$\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \times [0,T]} \tilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot (\mathbf{L}_E^F(\tilde{\underline{W}}_E^M) + \hat{\underline{F}}_{E,d}^M) dS dt = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cup \partial_2\Omega \times [0,T]} \tilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d dS dt. \quad (8)$$

Ce problème admet une solution unique si  $\text{mes}(\partial_1\Omega) \neq 0$ .

Le multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\underline{W}}^M$  tend vers 0 à convergence de l'algorithme LATIN, lorsque l'équilibre des forces d'interface est vérifié. En pratique, cette convergence est rapidement atteinte dès les premières itérations. L'étape linéaire implique donc la résolution de trois problèmes :

1. La résolution du problème micro 1, **Problème 2**, sur chaque sous-domaine pour le chargement connu  $\underline{f}_{-d|\Omega_E}$  et  $\hat{\mathbf{s}}_E$  dont on déduit la contribution  $\hat{\underline{F}}_{E,d}^M$  au problème macro/grossier, **Problème 3** ;
2. La résolution du problème macro/grossier, **Problème 3**, sur l'ensemble des sous-domaines ;
3. La résolution du problème micro 2, **Problème 2**, sur chaque sous-domaine pour le chargement  $\tilde{\underline{W}}_E^M$  déterminé par le problème macro/grossier.

### 2.3.3 Convergence du schéma itératif LATIN

En présence de conditions aux limites suffisantes en déplacement, d'interfaces parfaites et d'interfaces de contact sans frottement, la convergence est prouvée dans le cas où  $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^-$  [4]. Pour les interfaces de contact avec frottement, il n'existe pas de preuve de convergence de l'algorithme, mais la convergence est obtenue en pratique [6, 9]. Afin de garantir la convergence pour une large classe de comportements matériau et de types d'interfaces, une étape de relaxation est nécessaire à la fin de l'étape linéaire, ce qui est classique pour les algorithmes de type point fixe :

$$\mathbf{s}_{n+1} \leftarrow \mu \mathbf{s}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n \quad (9)$$

où le paramètre de relaxation  $\mu \in [0, 1]$ . Pour  $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = k\mathbf{I}_d$  avec  $k > 0$ , la valeur  $\mu = 0.8$  est en pratique utilisée. L'indicateur LATIN suivant est classiquement adopté [4] :

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum_E \|\mathbf{s}_E - \hat{\mathbf{s}}_E\|^2}{\frac{1}{2} \sum_E (\|\mathbf{s}_E\|^2 + \|\hat{\mathbf{s}}_E\|^2)}}, \text{ avec } \|\mathbf{s}_E\|^2 = \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} (\mathbf{k}^- \underline{W}_E^2 + \mathbf{k}^{-1} \underline{F}_E^2) dSdt. \quad (10)$$

L'indicateur de convergence LATIN classique (10) dépend du paramètre de direction de recherche  $\mathbf{k}^-$ ,

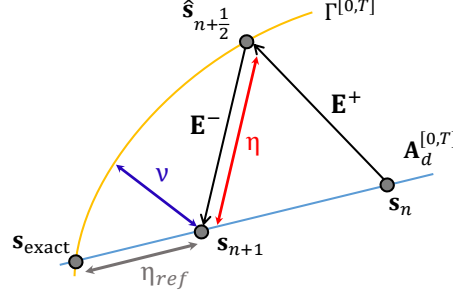


FIGURE 2 – Sous-domaine  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  interagissant à travers l'interface  $\Gamma_{EE'}$ .

ce qui le rend difficile à interpréter et généralement peu fiable pour contrôler la convergence des quantités d'interface tout au long des itérations lorsqu'une bonne précision est requise. Ainsi, l'indicateur de convergence basé sur les conditions d'interface de contact proposé dans [5] est revisité dans [13] afin de le rendre plus robuste dans différents scénarios présentant des conditions de contact complexes et variés.

## 2.4 Résolution de l'étape linéaire à l'aide de la réduction de modèle par PGD

Afin d'accélérer la résolution du **Problème 2** par sous-domaine défini sur tout le domaine espace-temps, celui-ci est résolu par réduction de modèle basée sur une représentation en variables séparées d'espace et du temps, et plus précisément sur la PGD [11]. En réécrivant, le problème en termes de correction entre deux itérés de l'étape linéaire  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$ , une construction progressive des fonctions espace-temps d'une représentation sous forme séparée des corrections des variables est réalisée :

$$\Delta \underline{u}_E = \underline{z}(x)\lambda(t) \text{ sur } \Omega_E \times [0, T], \quad \Delta \underline{W}_E = \underline{Z}(x)\lambda(t) \text{ et } \Delta \underline{F}_E = \underline{G}(x)\psi(t) \text{ sur } \partial\Omega_E \times [0, T].$$

L'admissibilité cinématique et statique et la relation de comportement élastique linéaire permettent de montrer que  $\psi(t) = \lambda(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  et que la condition suivante d'admissibilité des modes spatiaux de déplacement et d'efforts doit être respectée :

$$\forall (\underline{z}^*, \underline{Z}^*) \in \mathbf{E}_{E, ad}, \quad \int_{\Omega_E} \varepsilon(\underline{z}) : \mathbf{K} : \varepsilon(\underline{z}^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{G} \cdot \underline{Z}^* dS \quad (11)$$

Cependant, la direction de recherche écrite en correction  $\Delta \underline{F}_E + \mathbf{k}^- \Delta \underline{W}_E - \underline{\delta}_E$  avec  $\underline{\delta}_E = \widehat{\underline{F}}_E + \mathbf{k}^- \widehat{\underline{W}}_E - (\underline{F}_{E, n} + \mathbf{k}^- \underline{W}_{E, n})$  (ou encore  $(\underline{G} + \mathbf{k}^- \underline{Z}) \lambda - \underline{\delta}_E = \underline{0}$ ) ne peut pas être vérifiée exactement car  $\underline{\delta}_E$  n'est pas représenté sous forme séparée. La direction de recherche ne peut donc être vérifiée qu'au sens faible. Celle-ci étant un paramètre de la stratégie, elle n'a pas besoin d'être satisfaite exactement mais elle doit l'être suffisamment afin d'assurer la convergence. Ainsi, la construction d'un nouveau couple est obtenue en résolvant le problème suivant :

**Problème 4 (Étape d'enrichissement)** Trouver  $(\underline{Z}, \underline{G})$  vérifiant (11) et  $\lambda \in \mathcal{L}_{[0, T]}^2$  qui minimisent l'erreur en direction de recherche :

$$(\underline{Z}, \underline{G}, \lambda) = \arg \min_{(\underline{Z}, \underline{G}) \text{ adm.}, \lambda \in \mathcal{L}_{[0, T]}^2} \|(\underline{G} + \mathbf{k}^- \underline{Z}) \lambda - \underline{\delta}\|_2^2 \text{ avec } \|\square\|_2^2 = \int_{\partial\Omega_E \times [0, T]} \square^2 dSdt.$$

Ce problème est résolu en introduisant le champ auxiliaire  $\underline{L} := \underline{G} + \mathbf{k}^- \underline{Z}$  à l'aide d'un algorithme classique de point fixe. Une étape peu coûteuse de mise à jour (*update*) des fonctions temporelles  $\{\lambda_k\}_{k=1}^p$  sur la base réduite courante  $\{\underline{L}_k\}_{k=1}^p$  est classiquement et systématiquement réalisée au début de chaque

étape linéaire afin d'améliorer la qualité de la représentation PGD et de limiter le création de modes redondants. Le critère d'enrichissement de la base réduite est basée sur l'approximation de la direction de recherche :  $\xi = \frac{\|\delta_E - \tilde{\delta}_E\|_2}{\|\tilde{\delta}_E\|_2} > \xi_0$  avec  $\tilde{\delta}_E = \hat{F}_E + \mathbf{k}^- \hat{W}_E - [F_{E,0} + \mathbf{k}^- W_{E,0} + \sum_{k=1}^p L_k (\lambda_k + \Delta\lambda_k)]$  où  $\{\Delta\lambda_k\}_{k=1}^p$  sont les corrections des fonctions temporelles obtenues par l'étape d'*update*. Le choix de  $\delta_0$  est crucial afin de construire une base réduite de qualité et de taille contrôlée, c'est-à-dire la plus optimale en comparaison à la SVD des quantités. Des techniques de tri de base réduite existent [9], cependant modifier la base réduite des modes auxillaires  $\{L_k\}_{k=1}^p$  nécessite dans ce cas de reconstruire une représentation admissible des quantités d'interface vérifiant (11). Il est donc préférable de générer les modes avec parcimonie sans avoir recours à des techniques de tri ou de *downsizing* [9].

### 3 Application à une structure stratifiée avec contact frottant

On s'intéresse à une structure 2D stratifiée représentative des phénomènes de glissement survenant au sein d'un câble d'ancrage spiralé monotoron [12] (**Figure 3a** et **Table 2**). Trois structures élancées en interactions de contact frottant et encastrés à l'une de leurs extrémités sont soumises à un chargement constant de pression externe  $p$  ainsi qu'à un chargement oscillant de traction  $F_x$  et de cisaillement  $F_y$  (**Figure 3b**). L'indicateur de convergence LATIN avec et sans PGD montre qu'une valeur différente et

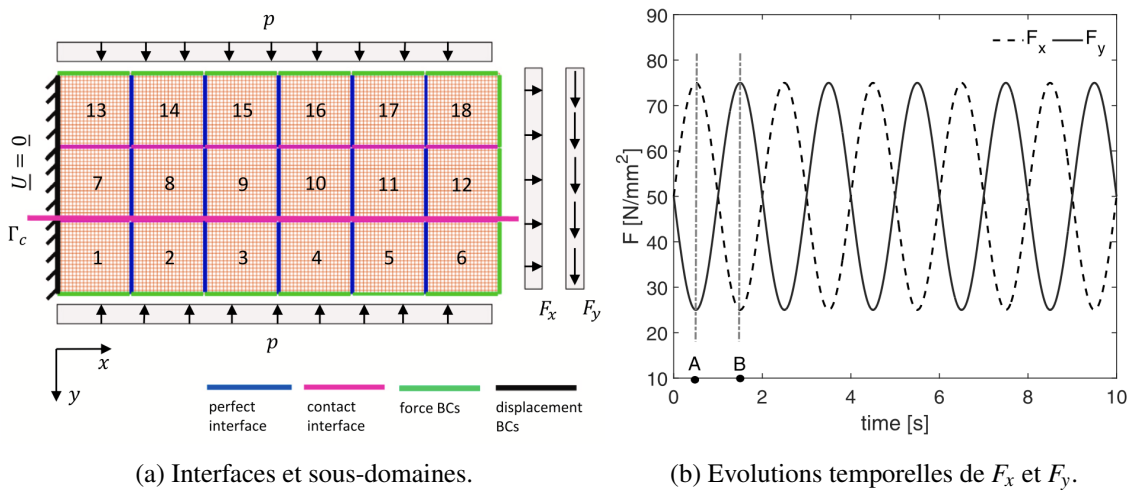
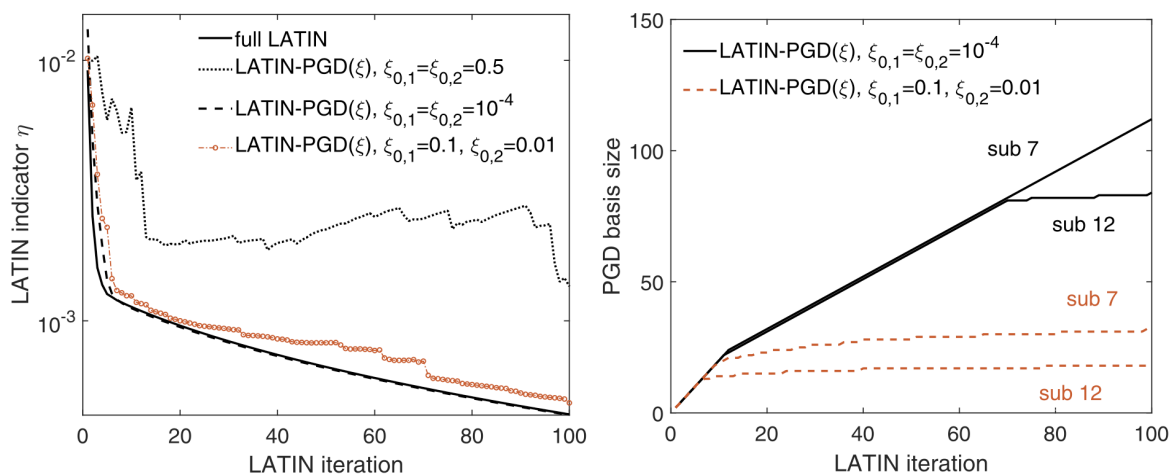


FIGURE 3 – Structure stratifiée avec grandes interfaces de contact frottant soumise à une pression externe et un chargement oscillant de traction et de cisaillement.

Module de Young, $E$	130 000 MPa
Coefficient de Poisson, $\nu$	0.2
Dimensions $L_x, L_y$	180 mm, 90 mm
Nombre d'éléments par sous-domaine	20 × 20 QUA8
Nombre de pas de temps	1000
Intervalle d'étude $[0, T]$	$[0, 10 \text{ s}]$
Coefficient de frottement, $f$	0.3
Chargement de pression, $p$	100 MPa

TABLE 2 – Paramètres de la structure stratifiée de la **Figure 3**.

judicieuse du critère d'enrichissement  $\xi_0$  pour les problèmes micro 1 et 2 permet d'obtenir une courbe de convergence proche de celle obtenue par la méthode LATIN sans PGD mais pour un coût de calcul 10 fois plus faible. Les valeurs de  $\xi = \xi_{0,1} = 0.1$  et  $\xi = \xi_{0,2} = 0.01$  permettent ainsi d'une part l'ajout systématique de modes dans les premières itérations pour le problème micro 2 afin que les quantités macro convergent rapidement et d'autre part l'ajout de modes de façon parcimonieuse pour le problème micro 1 assurant la convergence des quantités micro et la génération de bases réduites par sous-domaine de taille contrôlée et de qualité (**Figure 4b**).



(a) Indicateur de convergence LATIN avec et sans (b) Évolution de la taille de la base réduite pour les sous-domaines 7 et 12.

FIGURE 4 – Indicateur de convergence LATIN avec et sans PGD et taille de la base réduite pour deux sous-domaines pour différentes valeurs du critère d'enrichissement  $\xi_{0,1}$  et  $\xi_{0,2}$

## Références

- [1] P. Alart, F. Lebon (1995), *Solution of frictional contact problems using ILU and coarse/fine preconditioners*. *Comp. Mech.*, 16 (2) : 98-105, 1995.
- [2] D. Dureisseix, C. Farhat. *A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems*. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 50 (12) : 2643-2666, 2001.
- [3] J. Dobiáš, S. Pták, Z. Dostál, V. Vondrák. *Total FETI based algorithm for contact problems with additional non-linearities*. *Adv. Eng. Softw.*, 41(1) : 46-51, 2010.
- [4] P. Ladevèze. *Mécanique non linéaire des structures : nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Hermès, 1996.
- [5] L. Champaney, J.-Y. Cognard, P. Ladevèze, *Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions*. *Comp. Struct.*, 73(1-5) : 249-266, 1999.
- [6] P. Ladevèze, A. Nouy, O. Loiseau. *A multiscale computational approach for contact problems*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191(43) : 4869-4891, 2002.
- [7] M. Balajewicz, D. Amsallem, C. Farhat. *Projection-based model reduction for contact problems*. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 106 (8) : 644-663, 2016.
- [8] A. Benaceur, A. Ern, V. Ehrlacher. *A reduced basis method for parametrized variational inequalities applied to contact mechanics*. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 121(6) : 1170-1197, 2020.
- [9] A. Giacomini, D. Dureisseix, A. Gravouil, M. Rochette. *Toward an optimal a priori reduced basis strategy for frictional contact problems with LATIN solver*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 283 : 1357-1381, 2015.
- [10] P. Ladevèze, J.-C. Passieux, D. Néron. *The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 199(21-22) : 1287-1296, 2010.
- [11] A. Nouy, P. Ladevèze. *Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems*. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 2(4), 2004.
- [12] D. Zeka, P.-A. Guidault, D. Néron, M. Guiton. *On the benefits of a multiscale domain decomposition method to model-order reduction for frictional contact problems*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 429 : 117171, 2024.
- [13] D. Zeka, P.-A. Guidault, D. Néron, M. Guiton. *Control of the accuracy and improvement of the convergence rate of a LATIN-based multiscale strategy for frictional contact problems*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 446 : 118268, 2025.
- [14] J.-C. Passieux. *Approximation radiale et méthode latin multiéchelle en temps et espace*, Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2008.
- [15] G. Zavarise, P. Wriggers. *A superlinear convergent augmented Lagrangian procedure for contact problems*, *Engrg. Comp.*, 16(1) : 88-119, 1999.
- [16] P. Bussetta, D. Marceau, J.-P. Ponthot. *The adapted augmented Lagrangian method : a new method for the resolution of the mechanical frictional contact problem*, *Comp. Mech.*, 49(2) : 259-275, 2012.