

# Discrétisation cartésienne pondérée de modèles CAO pour l'analyse par éléments finis de géométries 3D complexes

L. Calmettes<sup>1</sup>, M. Faudé<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Expleo, Toulouse, lucie.calmettes@expleogroup.com

<sup>2</sup> Expleo, Toulouse, mathieu.faudef@expleogroup.com

**Abstract** — La génération automatique de maillages 3D adaptés à des géométries complexes reste un verrou majeur pour l'analyse par éléments finis à partir de la CAO. Nous proposons une méthode de maillage discrète que nous appelons voxel qui immerge la géométrie dans une grille cartésienne grossière et remplace le maillage conforme des frontières par une pondération des voxels de bord, inspirée des méthodes immergées de type Finite Cell. L'intégration éléments finis s'effectue alors avec des formulations standards sur une grille régulière. Des cas tests de traction sur éprouvettes montrent une réduction significative du nombre de cellules et du temps de pré-traitement par rapport à des maillages volumiques industriels, tout en conservant une faible erreur sur les déplacements et une bonne approximation de la contrainte principale maximale.

**Mots clés** — maillage automatique, maillage 3D, assemblage automatique.

## 1 Introduction

Dans de nombreux secteurs industriels (aéronautique, énergie, transport), la fiabilité des calculs par éléments finis est de plus en plus assurée par une chaîne numérique continue à partir de la CAO, capable de traiter des géométries 3D complexes dans des boucles de conception itératives et contraintes en temps. Pourtant, la génération d'un maillage conforme de bonne qualité demeure un verrou majeur et les stratégies automatiques les plus répandues (Delaunay, frontal advancing, octree, boundary layer, etc.) restent fortement génériques et peinent à s'adapter aux particularités locales des pièces réelles. Ces approches conduisent fréquemment à des sur-raffinements massifs dans les zones géométriques critiques ou, à l'inverse, à des sous-raffinements préjudiciables à la précision, ce qui impose des interventions manuelles répétées et limite l'automatisation complète du processus.

Face à ces difficultés, plusieurs pistes ont été explorées pour rapprocher CAO et analyse, notamment l'isogeometric analysis, qui exploite directement les NURBS de la CAO [1], ainsi que les méthodes immergées et Finite Cell, dans lesquelles la géométrie est plongée dans une grille de calcul indépendante des frontières physiques [2, 3]. En parallèle, des approches à base de voxels, initialement développées pour la biomécanique ou la simulation à partir d'imagerie, exploitent des grilles cartésiennes régulières pour représenter des géométries complexes ou hétérogènes à partir de nuages de points ou de données volumétriques [4, 5].

Cependant, la plupart de ces travaux restent soit centrés sur des données issues de l'imagerie (radiographies, tomographies) et non directement sur des modèles CAO [6], soit limités à des problèmes 2D ou à des géométries relativement simples [3], soit encore dépendants de solveurs spécifiques et de procédures d'intégration sophistiquées [7]. Les méthodes de maillage dites voxel, issues du monde de l'imagerie, appliquées à la CAO souffrent par ailleurs de plusieurs limitations structurantes. Pour capturer correctement la géométrie, des résolutions élevées sont souvent requises, ce qui conduit à des maillages contenant plusieurs dizaines de millions de cellules et à des temps de calcul importants, comme le montrent les études de micro-éléments finis basées sur la micro-tomographie ou la QCT [8, 9]. De plus, la discrétisation cartésienne impose en général une approximation en « escalier » des surfaces, dont l'influence sur les contraintes de surface a motivé le développement de techniques spécifiques de lissage ou de traitement des voxels de bord [10]. Les approches non conformes utilisant des grilles emboîtées ou des raffinements locaux conduisent en outre à des maillages localement non homogènes avec des nœuds dits « pendants », qui doivent être gérés explicitement par le solveur [11]. Enfin, de nombreux travaux à

base de voxels restent centrés sur des pièces isolées (os, implants, composants uniques) reconstruites à partir d'imagerie, sans traiter explicitement la question de la préservation fine de la métrique (position, orientation, échelle) de chaque composant dans des assemblages CAO complexes [12]. Les méthodologies voxel issues du domaine médical, qui construisent des modèles éléments finis directement à partir de données CT ou micro-CT, s'intéressent essentiellement à la réponse mécanique locale de structures anatomiques isolées (vertèbres, fémurs proximaux, biopsies trabéculaires) [8, 13] et ne considèrent pas explicitement le positionnement relatif fin de plusieurs pièces dans une structure assemblée, pourtant central pour les applications de calcul de structure.

Dans ce contexte, une méthodologie de maillage voxel automatisé à partir de modèles CAO 3D est proposée, dans la continuité des approches Finite Cell sur maillage voxel [2, 3], en visant explicitement le passage direct d'un modèle CAO vers une discrétisation cartésienne grossière exploitable dans un solveur éléments finis standard, sans maillage conforme des frontières ni développement d'un solveur dédié. La méthode a été conçue pour accélérer les études conceptuelles et pour permettre le maillage robuste de zones de transition dans des modèles éléments finis de grande taille, où la génération d'un maillage conforme devient particulièrement coûteuse. La géométrie est immergée dans une grille de voxels de taille relativement grande ; la fidélité géométrique n'est plus portée par la topologie des éléments mais par un traitement volumique adapté des voxels de bord, fondé sur une classification intérieur/extérieur robuste et sur une pondération locale des cellules aux frontières. Cette formulation permet de préserver la métrique issue de la CAO tout en transférant la complexité de modélisation de la génération d'un maillage conforme vers une étape locale d'estimation de fractions solides, avec une intégration éléments finis reposant sur une pénalisation matérielle compatible avec des infrastructures logicielles standard. La suite de l'étude est consacrée à la description détaillée de la chaîne de génération du maillage cartésien et à l'évaluation numérique de la méthode. Le principe général de la discrétisation voxel et la projection de la géométrie CAO dans une grille cartésienne sont d'abord présentés, puis une stratégie générique de traitement des cellules de bord, fondée sur une pondération volumique locale des propriétés matérielles, est introduite, les détails numériques n'étant qu'esquissés dans cette première étude. La méthode est ensuite évaluée sur plusieurs cas tests issus de la mécanique des structures, incluant notamment des éprouvettes de traction cylindriques représentatives des pratiques industrielles aéronautiques, afin de quantifier la réduction du nombre de cellules et du temps de pré-traitement, ainsi que l'impact sur la précision des déplacements et des contraintes.

## 1.1 Création d'un maillage voxel à partir d'un modèle CAO

La génération du maillage voxel repose sur deux étapes principales. Dans un premier temps, un nuage de points régulier est défini au sein d'une boîte englobante de la géométrie à mailler, puis les points situés à l'intérieur de cette géométrie sont identifiés. Dans un second temps, un maillage hexaédrique structuré est construit à partir de l'ensemble de ces points internes. L'identification des points se fait grâce à une détection de surface à l'aide d'une méthodes de lancer de rayons.

### 1.1.1 Discrétisation de la boîte englobante

Pour le lancer de rayon un maillage surfacique triangulaire fin de la géométrie est généré automatiquement. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine représentant la géométrie à mailler, et  $\partial\Omega_h$  sa discrétisation surfacique triangulée. À partir de ce maillage surfacique, on construit une boîte englobante autour de la géométrie à mailler,

$$B = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}] \quad (1)$$

déduite directement de la bounding box du maillage triangulaire. On fixe une taille de voxel  $h > 0$  et l'on définit ensuite trois grilles discrètes, en balayant chacun des intervalles de la boîte englobante avec un pas constant égal à cette taille de voxel :

$$\begin{aligned} x_i &= x_{\min} + ih, & i &= 0, \dots, N_x - 1, \\ y_j &= y_{\min} + jh, & j &= 0, \dots, N_y - 1, \\ z_k &= z_{\min} + kh, & k &= 0, \dots, N_z - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

où,

$$N_x = \left\lceil \frac{x_{\max} - x_{\min}}{h} \right\rceil, \quad N_y = \left\lceil \frac{y_{\max} - y_{\min}}{h} \right\rceil, \quad N_z = \left\lceil \frac{z_{\max} - z_{\min}}{h} \right\rceil \quad (3)$$

Les points de test sont alors définis par

$$x_{ijk} = (x_i, y_j, z_k), \quad (i, j, k) \in I \times J \times K \quad (4)$$

avec  $I = \{0, \dots, N_x - 1\}$ ,  $J = \{0, \dots, N_y - 1\}$ ,  $K = \{0, \dots, N_z - 1\}$ . L'ensemble de ces points constitue une grille cartésienne régulière qui recouvre entièrement la géométrie. On introduit une fonction caractéristique discrète de la géométrie,

$$\chi_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{ijk} \in \Omega, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

qui sera identifiés les points inclus dans la géométrie à mailler et les points extérieurs. La valeur de  $\chi_{ijk}$  est déterminée par un test intérieur/extérieur fondé sur un lancer de rayon : pour chaque point de grille  $\mathbf{x}_{ijk}$ , on considère un rayon  $r(t) = \mathbf{x}_{ijk} + t\mathbf{d}$ ,  $t \geq 0$ , dans une direction fixée  $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$  et l'on compte le nombre  $N(\mathbf{x}_{ijk}, \mathbf{d})$  d'intersections avec la surface triangulée  $\partial\Omega_h$  ; on pose alors  $\chi_{ijk} = 1$  si  $N(\mathbf{x}_{ijk}, \mathbf{d})$  est impair et  $\chi_{ijk} = 0$  sinon.

### 1.1.2 Construction des cellules hexahédriques dit voxels autour des points intérieurs

À partir de la fonction caractéristique discrète  $\chi_{ijk}$ , la seconde étape consiste à construire un maillage hexaédrique structuré. On introduit l'ensemble des nœuds de la grille

$$\mathcal{N} = \{ \mathbf{X}_{ijk} = (X_{ijk}, Y_{ijk}, Z_{ijk}) \}, \quad (6)$$

dont les coordonnées physiques sont définies à partir d'une boîte englobante « large »  $\mathcal{B}_{\text{large}}$  et d'un décalage  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  qui assure la conservation de la position absolue de la géométrie CAO :

$$\begin{cases} X_{ijk} = x_{\min}^{\text{large}} + ih + \Delta x, \\ Y_{ijk} = y_{\min}^{\text{large}} + jh + \Delta y, \\ Z_{ijk} = z_{\min}^{\text{large}} + kh + \Delta z. \end{cases} \quad (7)$$

Le choix du décalage est tel que, pour les points utiles, ces expressions se réduisent à

$$\begin{cases} X_{ijk} = x_{\min} + ih, \\ Y_{ijk} = y_{\min} + jh, \\ Z_{ijk} = z_{\min} + kh, \end{cases} \quad (8)$$

ce qui garantit que les coordonnées du maillage voxel restent directement alignées sur celles de la CAO, sans recentrage ni changement d'échelle.

Pour chaque point intérieur, c'est-à-dire pour chaque triplet  $(i, j, k)$  tel que  $\chi_{ijk} = 1$ , on génère ensuite des voxels qui l'entourent. On définit l'ensemble des offsets

$$\mathcal{S} = \{(s_x, s_y, s_z) \mid s_x, s_y, s_z \in \{-1, +1\}\}, \quad (9)$$

qui contient les huit combinaisons possibles  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Pour un offset  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) \in \mathcal{S}$ , on associe au point  $\mathbf{X}_{ijk}$  un hexaèdre

$$\Omega_{ijk}(\mathbf{s}) = [X_{ijk}, X_{ijk} + s_x h] \times [Y_{ijk}, Y_{ijk} + s_y h] \times [Z_{ijk}, Z_{ijk} + s_z h]. \quad (10)$$

Les huit sommets de cet élément se déduisent en ajoutant ou retranchant  $h$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  à partir de  $\mathbf{X}_{ijk}$ . La combinaison des différents offsets permet de générer localement, autour de chaque point intérieur, un bloc de huit voxels qui contribuent à immerger complètement la géométrie dans la grille cartésienne.

Dans la construction globale, les nœuds communs à plusieurs voxels ne sont définis qu'une seule fois, et les hexaèdres géométriquement identiques sont identifiés et ne sont conservés qu'en un seul

exemplaire. On obtient ainsi un maillage structuré de cellules hexaédriques de côté  $h$ , aligné avec les axes de la CAO et recouvrant intégralement la géométrie. Certaines cellules sont entièrement à l'intérieur du domaine, d'autres entièrement à l'extérieur, et d'autres enfin sont coupées par la frontière  $\partial\Omega$  ; ce sont ces cellules de bord qui feront l'objet, par la suite, d'une pondération volumique pour mieux approcher la géométrie réelle.

### **Pondération des cellules de bord**

Le maillage voxel étant, par construction, légèrement plus volumineux que la géométrie initiale, les cellules situées au bord du domaine doivent être pénalisées afin de limiter l'influence des portions de voxels qui « dépassent » de la géométrie. Pour cela, on associe à chaque cellule un coefficient de pondération  $w_{ijk} \in [0, 1]$ , défini à partir d'une estimation de la part de son volume effectivement immergée dans  $\Omega$  :

$$w_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si la cellule est entièrement à l'intérieur de } \Omega, \\ 0, & \text{si la cellule est entièrement à l'extérieur,} \\ \in (0, 1), & \text{si la cellule est coupée par } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Ces coefficients sont ensuite utilisés pour réduire l'influence numérique des cellules de bord, tout en conservant un maillage structuré simple à manipuler.

## **2 Tests de la méthode sur des éprouvettes de traction**

L'objectif de cette partie est de tester la méthode de maillage voxel développée en comparant les résultats obtenus par éléments finis avec ceux d'un maillage classique généré directement sous ABAQUS.

### **2.1 Éprouvette de traction cylindrique**

La première géométrie étudiée est une éprouvette de traction cylindrique. Ce cas est particulièrement défavorable pour un maillage voxel, en raison des congés et surfaces courbes qui sont approchés sous forme d'« escaliers ». Le bas de l'éprouvette est encastré, tandis qu'une force de traction de 10 N est appliquée sur la face supérieure au moyen d'un couplage cinématique. La Figure 1 compare le maillage hexaédrique de référence et le maillage voxel utilisé pour la méthode proposée.

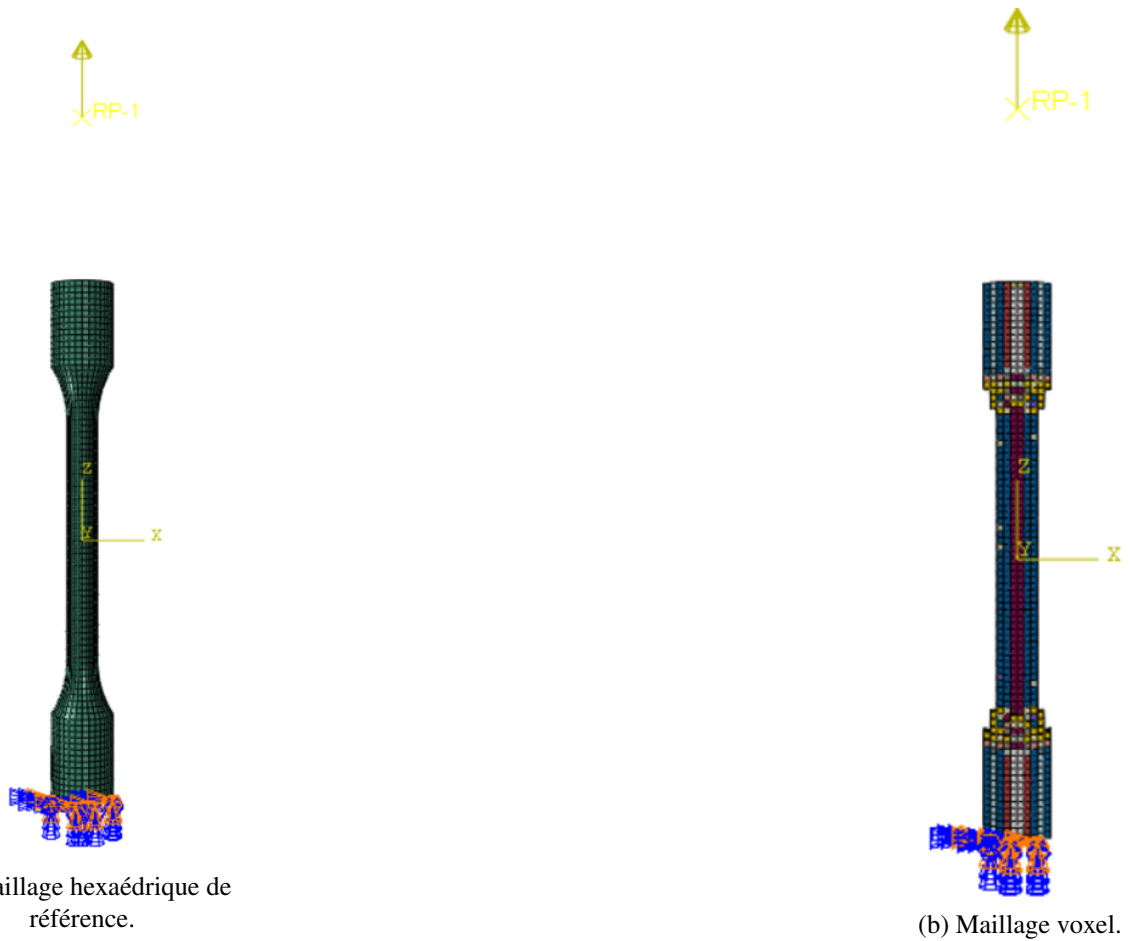


Figure 1: Comparaison entre le maillage de référence et le maillage voxel pour l'éprouvette de traction cylindrique.

La validation de la méthode, dans ce cas, repose uniquement sur la comparaison du déplacement global obtenu avec le maillage voxel et avec le maillage de référence, de manière à vérifier que la rigidité effective de l'éprouvette voxelisée reste cohérente.

## 2.2 Résultats en déplacement

L'une des difficultés majeures de la méthode voxel réside dans l'obtention de déplacements globaux cohérents, le volume décrit ayant tendance à être surestimé par rapport à la géométrie réelle. La stratégie de pondération introduite pour les cellules de bord permet de limiter ce biais. En utilisant la méthode de pondération décrite précédemment, les résultats obtenus avec le maillage voxel présentent, sur l'éprouvette cylindrique étudiée, une erreur relative en déplacement d'environ 1,85 % par rapport au maillage de référence (voir Figure 2).

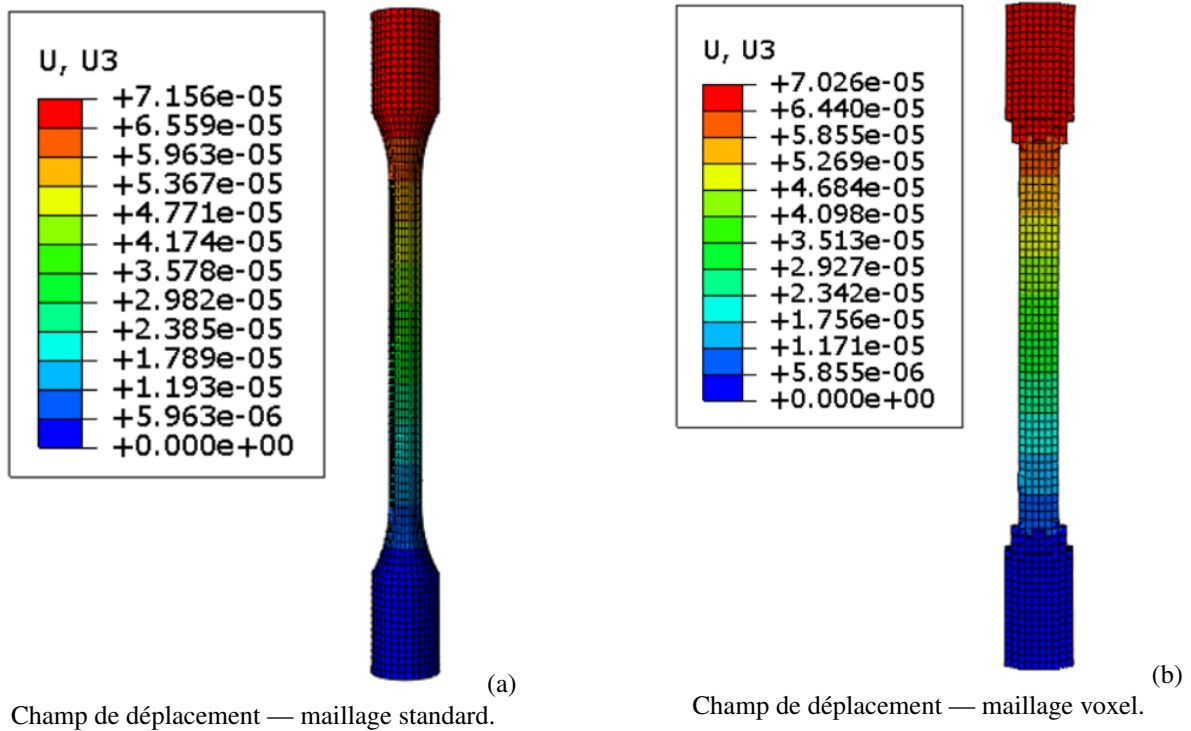


Figure 2: Comparaison des champs de déplacement obtenus avec le maillage standard et le maillage voxel.

Sur cette première éprouvette de traction, la méthode fournit des résultats satisfaisants : l'ordre de grandeur des déplacements est similaire à celui obtenu avec le maillage de référence, et la répartition des contraintes reste cohérente. Des essais complémentaires sur d'autres géométries sont néanmoins nécessaires pour confirmer ces observations et évaluer la robustesse de la méthode.

### 3 Tests de la méthode sur des éprouvettes en dépliage

Après l'éprouvette de traction cylindrique, la méthode est également évaluée sur des géométries présentant des zones de pli, typiques des pièces industrielles (rayons de pli, zones de reprise de forme, emboutissage, etc.). Ces régions sont mécaniquement sensibles, avec des chemins de chargement complexes et des gradients de déformation marqués dans l'épaisseur, ce qui impose une description tridimensionnelle suffisamment fine pour interpréter correctement les champs de contraintes et de déplacements.

#### 3.1 Éprouvette de traction

Le premier cas étudié est une éprouvette de traction, conçue pour représenter une zone de pli localisée soumise à un chargement de type dépliage. Les résultats de référence sont obtenus à l'aide d'un maillage hexaédrique standard de résolution fine, avec une taille maximale de cellule fixée à 1 mm. Le maillage de référence comporte 8256 éléments, pour un temps de calcul de l'ordre de 14 s. À partir de la même géométrie CAO, un maillage voxel est ensuite généré selon la procédure décrite précédemment (voxélisation, identification des cellules de bord, pondération), puis soumis au même cas de chargement : les bords latéraux gauche et droit restent non encastres, tandis qu'un couplage cinématique est appliqué sur la partie supérieure afin de reproduire un phénomène de dépliage. La Figure 3 présente, côte à côte, le maillage hexaédrique de référence et le maillage voxel, ainsi que les conditions aux limites et le chargement appliqué.

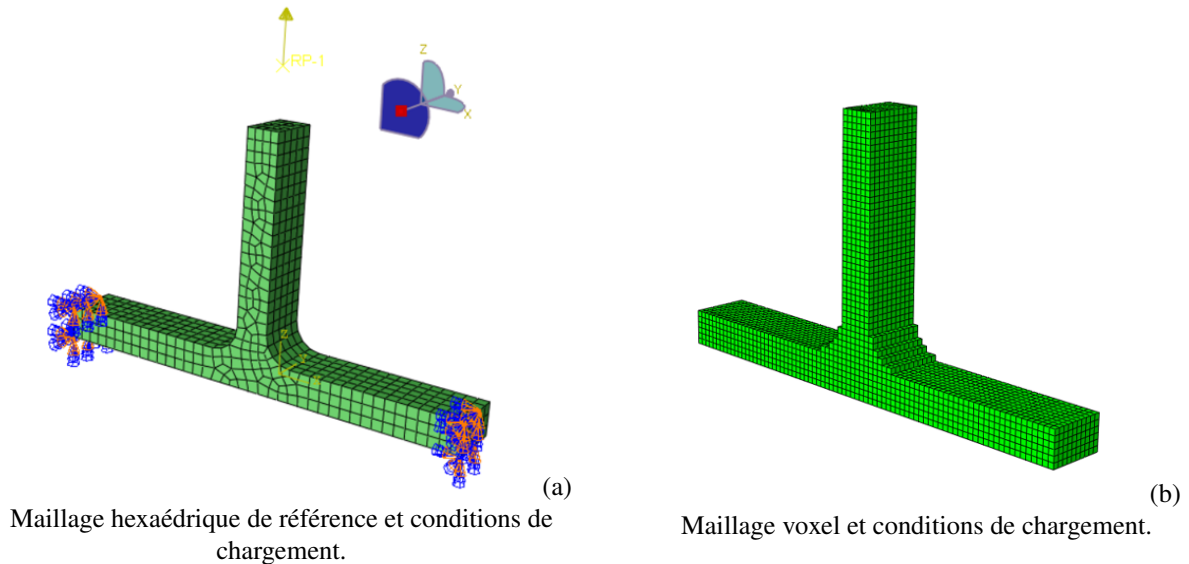


Figure 3: Éprouvette de traction : comparaison des maillages et des conditions de chargement.

Dans un premier temps nous évaluons la réponse endéplacement de l'éprouvette de dépliage. L'objectif est de vérifier que la rigidité globale obtenue avec le maillage voxel pondéré reste cohérente par rapport au maillage de référence, malgré une description géométrique plus grossière de la zone courbe. La Figure 4 illustre la comparaison des champs de déplacement issus des deux simulations. Sur la valeur maximale de déplacement, l'erreur relative entre le modèle voxel et la solution de référence reste limitée à environ 1,5 %.

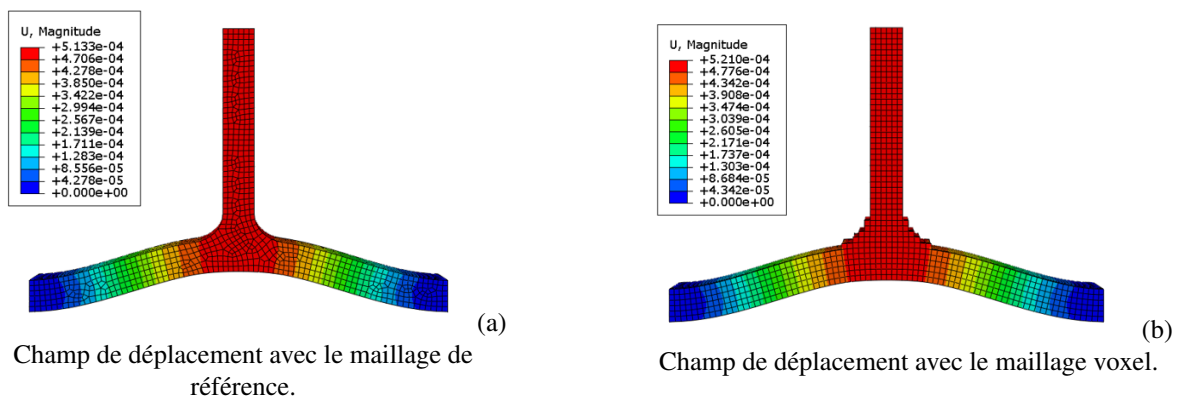


Figure 4: Comparaison des champs de déplacement obtenus avec le maillage de référence et le maillage voxel.

Afin d'affiner la comparaison et de disposer d'un outil d'analyse commun, une méthode de projection a été développée afin de reporter les résultats issus des calculs volumiques sur un maillage surfacique fin, indépendant du maillage de calcul. Les valeurs de contrainte principale maximale sont d'abord calculées pour chaque élément volumique à partir du tenseur de contraintes, puis associées aux centres des cellules du maillage volumique.

La projection vers le maillage surfacique de post-traitement est ensuite réalisée à l'aide d'une interpolation spatiale de type Inverse Distance Weighting (IDW). Pour chaque cellule du maillage surfacique, les cellules volumiques dont le centre se situe dans un rayon d'influence donné sont recherchées. La valeur de contrainte projetée est alors obtenue par une moyenne pondérée des contraintes des cellules voisines, les poids étant inversement proportionnels à la distance entre le centre de la cellule surfacique considérée et les centres des cellules volumiques. Cette approche permet de reconstruire un champ surfacique continu à partir de valeurs définies sur un maillage volumique potentiellement différent.

Afin de limiter les fluctuations locales liées à la discrétisation volumique, un léger lissage supplémentaire est appliqué sur le maillage surfacique par moyennage avec les cellules voisines immédiates. Cette procédure permet ainsi de générer une carte surfacique lissée de la contrainte principale maximale

pour chacun des modèles (référence et voxel) et de représenter les résultats sur un support géométrique commun et régulier. La Figure 5 montre un exemple de projection des contraintes principales maximales obtenues pour les deux approches.

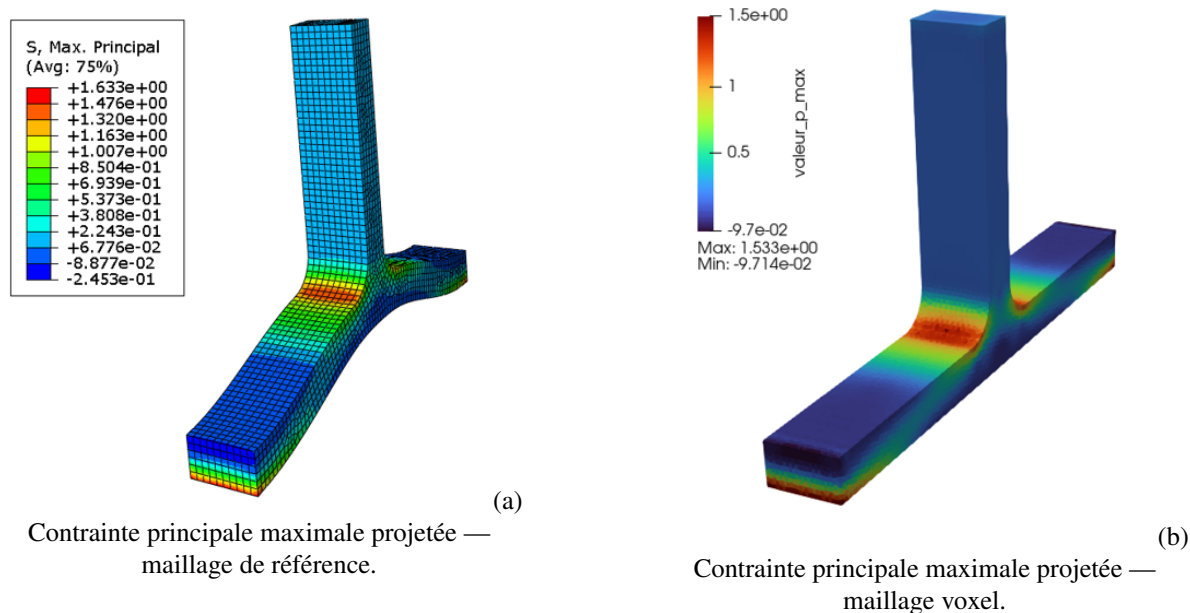


Figure 5: Projection des contraintes principales maximales sur un maillage surfacique fin pour la comparaison entre modèle de référence et modèle voxel.

En termes de contraintes, la comparaison des champs de contrainte principale maximale projetés sur le maillage surfacique fin montre une très bonne cohérence entre le modèle de référence et le modèle voxel pondéré. Sur la valeur maximale de la contrainte principale, l'erreur relative reste de l'ordre de 6,12 %, ce qui est un résultat très satisfaisant compte tenu de la sensibilité des contraintes locales aux effets de maillage et à la description géométrique. Pour une éprouvette de traction comportant une zone de pli fortement sollicitée, et donc a priori défavorable à une discrétisation en voxels, ces résultats indiquent que la méthode proposée est capable de reproduire de façon fiable le niveau de chargement maximal dans la zone critique.

## 4 Conclusion et perspectives

La méthodologie présentée permet de générer automatiquement, à partir de modèles CAO, des maillages voxels structurés dans lesquels la complexité géométrique n'est plus portée par la topologie du maillage, mais par une pondération fine des cellules de bord. Les cas tests menés sur des éprouvettes de traction cylindriques et sur une géométrie en dépliage montrent que, malgré une description en « escaliers » des surfaces, la méthode reste capable de reproduire de manière satisfaisante la rigidité effective et le niveau de contrainte principale maximale dans les zones critiques, avec des erreurs relatives limitées sur les déplacements et les contraintes.

Dans la suite de ce travail, un premier axe de développement consiste à intégrer cette approche dans des modèles industriels de grande taille. Pour cela, une méthode d'assemblage automatique de pièces maillées en voxels a été mise en place, de façon à pouvoir immerger directement des ensembles CAO multi-composants dans un même maillage cartésien, tout en préservant leur positionnement relatif. L'objectif est de rendre la procédure compatible avec des modèles globaux.

Un second axe porte sur le raffinement local des résultats dans les zones les plus sollicitées. À partir d'un premier calcul voxel, les zones où les contraintes principales maximales dépassent un seuil donné sont automatiquement détectées. Des méthodes de *patch* sont alors développées : dans ces régions, le maillage voxel est affiné ou remplacé par un maillage standard conforme, et un calcul itératif local est réalisé pour affiner la prédiction des contraintes maximales sans alourdir significativement le coût de calcul global. Cette stratégie doit permettre de combiner la robustesse et la simplicité du maillage

voxel pour le modèle complet avec la précision d'un maillage classique ciblé uniquement dans les zones critiques, en vue d'une utilisation dans des chaînes de calcul lors de phase d'études conceptuelles.

## References

- [1] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39):4135–4195, 2005.
- [2] A. Düster, J. Parvizian, Z. Yang, and E. Rank. The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(45):3768–3782, 2008.
- [3] N. Zander, S. Kollmannsberger, M. Ruess, Z. Yosibash, and E. Rank. The finite cell method for linear thermoelasticity. *Computers Mathematics with Applications*, 64(11):3527–3541, 2012.
- [4] Boliang Guan, Shujin Lin, Ruomei Wang, Fan Zhou, Xiaonan Luo, and Yongchuan Zheng. Voxel-based quadrilateral mesh generation from point cloud. *79(29):20561–20578*.
- [5] Udaranga Wickramasinghe, Edoardo Remelli, Graham Knott, and Pascal Fua. Voxel2mesh: 3d mesh model generation from volumetric data. In Anne L. Martel, Purang Abolmaesumi, Danail Stoyanov, Diana Mateus, Maria A. Zuluaga, S. Kevin Zhou, Daniel Racoceanu, and Leo Joskowicz, editors, *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention – MICCAI 2020*, pages 299–308, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [6] Chenlei Lv, Weisi Lin, and Baoquan Zhao. Voxel structure-based mesh reconstruction from a 3d point cloud. *IEEE Transactions on Multimedia*, 24:1815–1829, 2022.
- [7] Shunya Odawara, Yanhui Gao, and Kazuhiro Muramatsu. Magnetic field analysis with nonconforming voxel modeling using the nested geometric multigrid method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):595–598, 2012.
- [8] Maria Cristiana Costa, Gianluca Tozzi, Luca Cristofolini, Valentina Danesi, Marco Viceconti, and Enrico Dall'Ara. Micro finite element models of the vertebral body: Validation of local displacement predictions. *12(7):e0180151*.
- [9] Jeremy F. Magland, Ning Zhang, Chamith S. Rajapakse, and Felix W. Wehrli. Computationally-optimized bone mechanical modeling from high-resolution structural images. *7(4):e35525*.
- [10] Peter Arbenz and Cyril Flaig. On smoothing surfaces in voxel based finite element analysis of trabecular bone. In Ivan Lirkov, Svetozar Margenov, and Jerzy Waśniewski, editors, *Large-Scale Scientific Computing*, pages 69–77, Berlin, Heidelberg, 2008. Springer Berlin Heidelberg.
- [11] Shunya Odawara, Yanhui Gao, Kazuhiro Muramatsu, Takashi Okitsu, and Daiki Matsushashi. Magnetic field analysis using voxel modeling with nonconforming technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5):1442–1445, 2011.
- [12] Antonio Baccaiaaglia, Alessandro Ceruti, and Alfredo Liverani. A 3d voxel-based approach for fast aerodynamic analyses in conceptual design phases. *19(6):1236–1254*.
- [13] Amelie Sas, An Sermon, and G. Harry Van Lenthe. Experimental validation of a voxel-based finite element model simulating femoroplasty of lytic lesions in the proximal femur. *12(1):7602*.
- [14] Yaxiong Chen, Chetan Jois, and Ganesh Subbarayan. Meshfree CAD-CAE integration through immersed b-rep model and enriched isogeometric analysis. *17(6):1193–1214*.
- [15] Santiago Badia, Pere A. Martorell, and Francesc Verdugo. Geometrical discretisations for unfitted finite elements on explicit boundary representations. Publisher: arXiv Version Number: 2.