

# Estimation cinématique du cycle limite de flottement par assimilation de données

F. Maetz<sup>1,2</sup>, F. Renaud<sup>1</sup>, J.-L. Dion<sup>1</sup>, A. Leroy<sup>2</sup>, B. Chouvion<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire EULER, ISAE-Supméca – Institut supérieur de mécanique de Paris, 3 rue Fernand Hainaut 93407 Saint-Ouen cedex, [florian.maetz](mailto:florian.maetz), [franck.renaud](mailto:franck.renaud), [jean-luc.dion@isae-supmeca.fr](mailto:jean-luc.dion@isae-supmeca.fr)

<sup>2</sup> Centre de Recherche de l'École de l'Air (CREA), École de l'air et de l'espace, F-13661 Salon-de-Provence, [florian.maetz](mailto:florian.maetz), [benjamin.chouvion](mailto:benjamin.chouvion), [annie.leroy@ecole-air.fr](mailto:annie.leroy@ecole-air.fr)

**Résumé** — Afin d'améliorer les outils de conception liés aux ailes flexibles de grande envergure, on souhaite développer une métrologie permettant d'estimer la cinématique de l'aile lors de régimes de flottement aéroélastique. Ce travail évalue l'efficacité du filtre de Kalman à partir de cycles limites vibratoires simulés par un modèle de poutre non linéaire, afin d'en confirmer la pertinence pour un usage basé sur des mesures réelles.

**Mots clés** — Dynamique non linéaire, Filtre de Kalman, Flottement Aéroélastique.

## 1 Introduction

La prévision et la compréhension du flottement des ailes à grande envergure constituent des enjeux majeurs dans la conception des drones HAPS (High Altitude Pseudo-Satellites). Opérant de manière prolongée en stratosphère, ces aéronefs requièrent des ailes très élancées, particulièrement sensibles au flottement aéroélastique résultant du couplage entre la dynamique structurelle, l'aérodynamique et la dynamique du vol. À des vitesses d'écoulement supérieures à une vitesse critique, ce phénomène peut conduire à une instabilité dynamique susceptible d'entraîner la perte de l'appareil, comme l'a illustré le crash du prototype Helios de la NASA [11]. Cette vitesse critique est un facteur majeur dans la conception et l'utilisation de ces drones.

Afin d'améliorer la compréhension et la modélisation de ce phénomène, des essais en soufflerie à échelle réduite ont été menés à l'École de l'Air et de l'Espace, avec un suivi par caméras permettant d'obtenir un champ de déplacements complet sans perturber l'écoulement. Les données de déplacement ainsi obtenues sont particulières en cela qu'elles ne proviennent pas de capteurs classiques dont la caractérisation de l'incertitude de mesure est présumée connue. Pour ces données issues d'images, l'incertitude du déplacement peut dépendre de facteurs expérimentaux, comme l'éclairage ou la position de la caméra, ou de facteurs algorithmiques propres aux traitements d'images.

L'évaluation de la position, de la vitesse et de l'accélération du modèle à partir de ces données réelles sera alors également sujette à une incertitude qu'il est important de quantifier pour des applications ultérieures. Afin d'obtenir une estimation a priori de l'incertitude attendue sur les grandeurs cinématiques liées au modèle à partir de ces mesures expérimentales, une approche numérique est proposée dans cette étude.

Dans cet article, l'utilisation d'un filtre de Kalman [9] pour l'estimation de la cinématique à partir de mesures simulées sera présentée. On présentera d'abord le modèle utilisé pour la génération de cycles limites synthétiques, puis l'application du filtre de Kalman pour obtenir une estimation de la cinématique du modèle. La question posée est alors la suivante : quelle est la précision de l'estimation de la cinématique par cette méthode en fonction des différentes incertitudes de mesure (ici simulées) ?

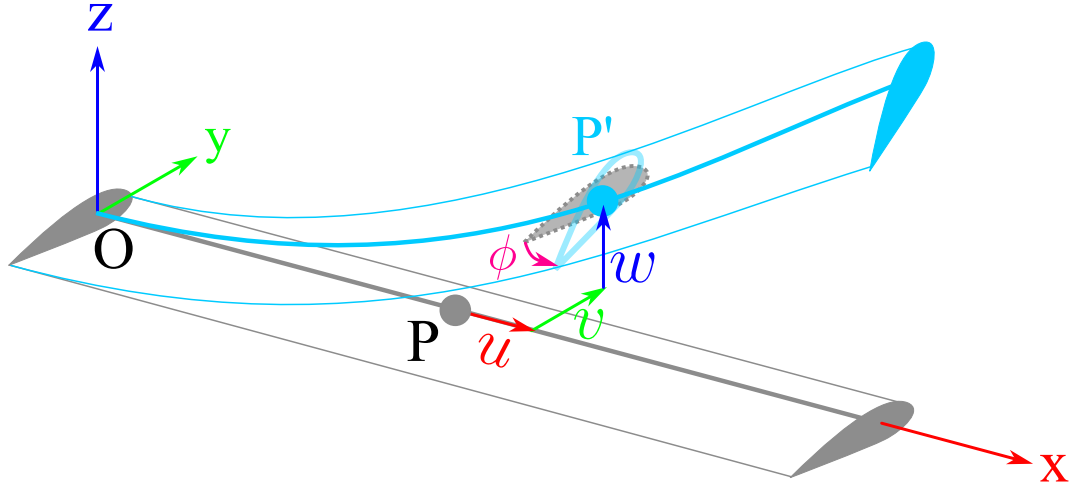


FIGURE 1 – Description cinématique du modèle HiFleW

## 2 Méthode

### 2.1 Modèle

Le modèle aéro-structurel utilisé est celui développé dans le code HiFleW de l'Ecole de l'Air et de l'Espace [1]. Il s'appuie sur des modèles de poutres géométriquement exacts appliqués au domaine aéronautique, tels que décrits dans les travaux de Hodges [7]. À partir de cette formulation exacte, une réduction de modèle est effectuée afin d'approximer la réponse pour des déplacements modérés, suivant l'approche proposée dans [3], basée sur une discrétisation de type Rayleigh–Ritz où les déplacements sont représentés par des séries entières. Ce choix de base se révèle pertinent pour notre étude, qui implique des déplacements modérément non linéaires et une contribution prépondérante des premiers modes de la structure [8]. La description cinématique du déplacement de la poutre est donnée dans l'équation (1).

$$\underline{P}'(x, \eta, \zeta, t) = \begin{bmatrix} x + u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T(x, t) \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Avec :

- $x, \eta, \zeta$  : la position d'un point P en position non déformée, avec  $x$  l'abscisse curviligne et  $\eta, \zeta$  les coordonnées dans la section.
- $\underline{P}$  : la position non déformée.
- $\underline{P}'$  : la position déformée à l'instant  $t$ .
- $u, v, w, \phi, R$  : des champs de déplacement et de rotation où  $\mathbf{R}$  dépend des fonctions précédentes.

On note  $\lambda$  une variable représentant indifféremment  $u, v, w$  ou  $\phi$ . La discrétisation de  $\lambda$  choisie est une approximation polynomial (2) tronquée à l'ordre  $n_\lambda$  avec une somme débutant de 1 à 2 afin de respecter les conditions limites cinématiques du problème.

$$\lambda(x, t) = \sum_i^{n_\lambda} q_{\lambda_i}(t) (x/L)^i \quad (2)$$

avec  $L$  la longueur de la poutre.

L'équation de la dynamique s'écrit alors sous la forme (3) où  $\underline{q}$  est le vecteur des coordonnées généralisées de notre système ( $\underline{q} = [q_u^i, q_v^i, q_w^i, q_\phi^i]$  de taille  $N_q$ ). Les vecteurs  $\underline{q}^2$  et  $\underline{q}^3$  sont obtenus par produit de Kronecker et caractérisent les effets non-linéaires quadratiques et cubiques, associés respectivement aux matrices de raideur non-linéaire  $\mathbf{K}_{nl2}$  et  $\mathbf{K}_{nl3}$ .

$$\mathbf{M}\underline{\dot{q}} + \mathbf{C}\underline{\dot{q}} + \mathbf{K}\underline{q} + \mathbf{K}_{nl2}\underline{q}^2 + \mathbf{K}_{nl3}\underline{q}^3 = \underline{F}_{aero}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \quad (3)$$

Dans cette équation, le vecteur d'effort  $\underline{F}_{aero}$  est issu de modèles analytiques basés sur l'écoulement plan autour de sections rigides. Plusieurs choix sont possibles en fonction des hypothèses retenues sur la dynamique du système [2], et la vitesse critique de flottement peut varier d'un facteur allant jusqu'à 4 selon

ces modèles [2]. Dans cette étude, le modèle d'aérodynamique instationnaire analytique de Theodorsen, présenté dans l'équation (4), est retenu. Celui-ci fait les hypothèses d'un mouvement instationnaire de faible amplitude en pilonnement et rotation dans un écoulement incompressible. En faisant en outre l'hypothèse que  $C(k) = 1$ , on obtient alors un modèle quasi-stationnaire pour de faibles fréquences réduites ( $k < .05$ ) [13]. Ce modèle permet de déterminer la force de portance  $F_L$  et le moment aérodynamique  $M_{1/4}$  appliqué au 1/4 de corde pour une section donnée de l'aile. Ces grandeurs, calculées section par section, sont alors interprétées comme des efforts linéiques le long de l'envergure.

$$F_L = 2\pi\rho_a b U C(k) [-\dot{w} + (b/2 - x_a)\dot{\phi} + U\phi] + \rho_a \pi b^2 [-\ddot{w} + x_a \ddot{\phi} + U\dot{\phi}] \quad (4)$$

$$M_{1/4} = -\pi\rho_a b^3 \left[ -\frac{\ddot{w}}{2} + \left( \frac{b}{8} - \frac{x_a}{2} \right) \ddot{\phi} + U\dot{\phi} \right]. \quad (5)$$

L'intégration sur l'envergure de l'aile du travail de ces efforts aérodynamiques et la dérivation par rapport aux coordonnées généralisées permettent alors d'obtenir l'effort généralisé  $F_{aero}$ .

La géométrie retenue pour l'aile, dans un premier temps, est celle de l'aile de Goland [5], un cas d'étude classique en aéroélasticité linéaire. Ses caractéristiques sont présentées dans le Tableau (1). Avec

$L$ (m)	$b$ (m)	$x_a$ (m)	$EI_z$ (N.m <sup>2</sup> )	$GJ$ (N.m <sup>2</sup> )	$m$ (kg.m <sup>-1</sup> )	$mdy$ (kg)	$J_p$ (kg.m)
6.1	0.91	-0.31	9.79e6	9.89e5	37.71	-6.53	8.64

TABLE 1 – Caractéristiques de l'aile de Goland

- $L$  : la longueur de l'aile
- $b$  : la demi-corde de l'aile
- $x_a$  : la distance entre le centre élastique et le point d'application des efforts aérodynamiques
- $EI_z$  : la rigidité en flexion selon  $z$
- $GJ$  : la rigidité en torsion
- $m$  : la masse linéique de l'aile
- $mdy$  : terme de couplage en masse entre flexion et torsion dû à un décalage entre le centre élastique et le centre de masse de la section
- $J_p$  : l'inertie linéique de l'aile

Les non linéarités dans l'équation (3) résultent d'effets géométriques structurels ainsi que du caractère suiveur des forces aérodynamiques. Il est possible de linéariser le système afin d'obtenir le comportement d'une petite perturbation, en fonction de la vitesse du vent, autour de la position d'équilibre — ici la position initiale, même si la prise en compte d'une position déformée reste envisageable. Le comportement dynamique du système linéarisé s'écrit alors sous la forme :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)\ddot{\underline{q}} + (\mathbf{C} + U\mathbf{C}_a)\dot{\underline{q}} + (\mathbf{K} + U^2\mathbf{K}_a)\underline{q} = \underline{0} \quad (6)$$

Ce système linéaire dépend des matrices  $\mathbf{K}_a$ ,  $\mathbf{C}_a$  et  $\mathbf{M}_a$ , qui sont des matrices issues des efforts aérodynamiques. À partir du problème aux valeurs propres complexes issu de (6), on peut tracer l'évolution de la partie réelle de la valeur propre en fonction de la vitesse du vent, tel qu'illustré sur la figure (2). Il est possible d'y observer une vitesse de vent à partir de laquelle la structure devient instable. Les solutions du problème aux valeurs propres étant cherché sous la forme  $\underline{q} = \underline{\phi}e^{\alpha t}$ , le système devient instable lorsqu'un mode a une partie réelle qui devient positive. La vitesse critique de flottement est trouvée à 64.6 m/s, ce qui est proche des résultats donnés dans la littérature [6] (62 m/s – écart de 4%).

Une fois cette vitesse critique identifiée, il est possible d'obtenir des cycles limites dus aux effets non-linéaires, en reprenant notre équation dynamique complète (3) et en procédant à des intégrations temporelles à des vitesses de vent supérieures à la vitesse critique.

Le diagramme de phase présenté à la figure (3) montre l'évolution du point situé à l'extrémité libre de l'aile pour différentes vitesses d'écoulement supérieures à la vitesse critique. On y observe que la flexion en  $z$  est le mouvement prédominant, mais reste d'amplitude relativement faible ( $< 5\%L$ ), du fait que l'aile de Goland est plutôt rigide en flexion. Cependant, l'aile subit des rotations assez importantes, de l'ordre de 0.3 rad, ce qui engendre des déplacements dans l'axe  $y$  par effet géométrique non linéaire.

On constate également que les mouvements ne sont pas purement harmoniques, le diagramme de phase n'étant pas parfaitement circulaire. Plus la vitesse augmente, plus l'amplitude des harmoniques supérieures tend à croître.

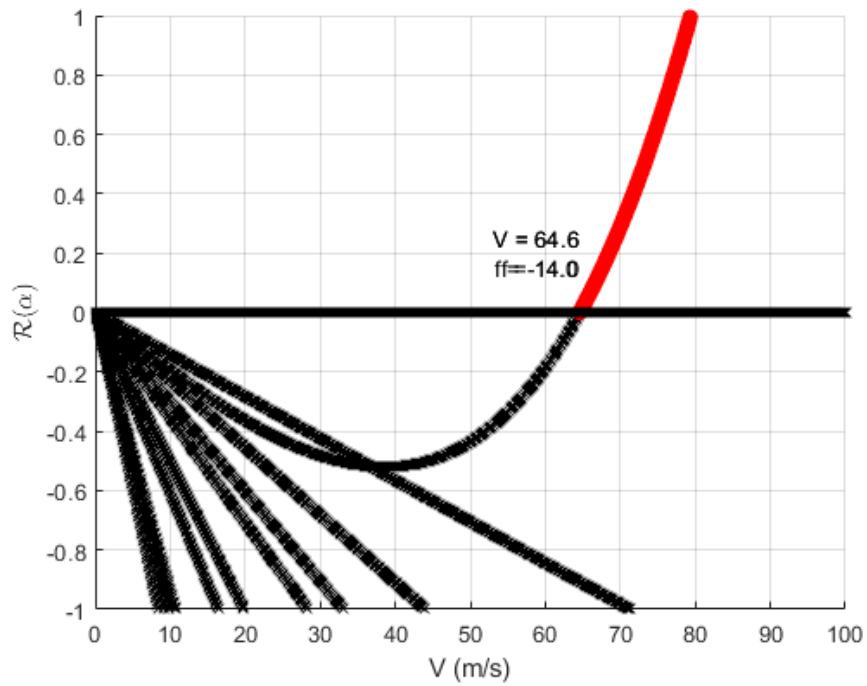


FIGURE 2 – Évolution des parties réelles des valeurs propres  $\alpha$  en fonction de la vitesse du vent

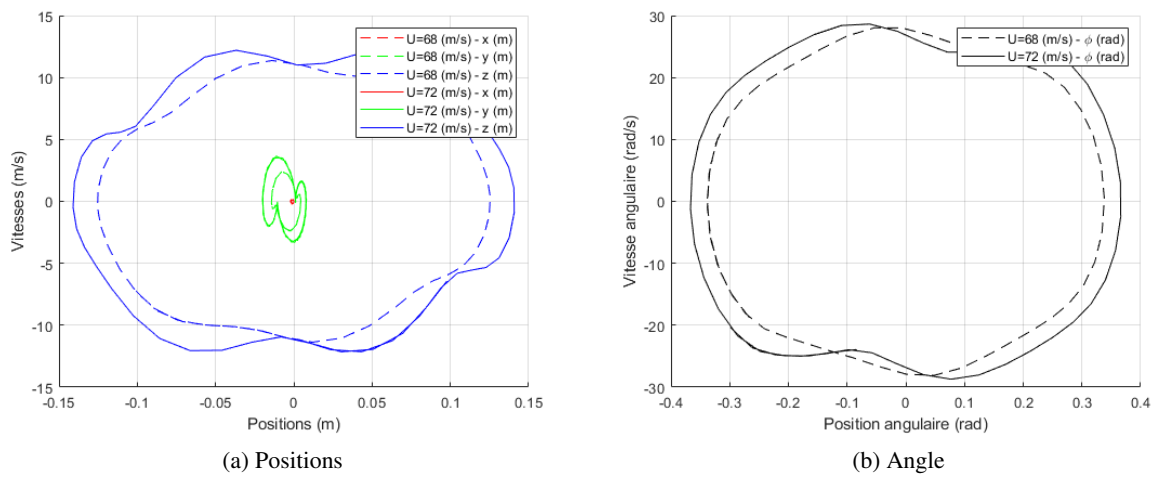


FIGURE 3 – Diagrammes de phase du cycle limite

## 2.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman [9] est choisi comme outil d'estimation d'état en raison de sa capacité à fournir une estimation optimale du vecteur d'état d'un système dynamique à partir de mesures bruitées. Il combine de manière récursive les informations issues du modèle dynamique et des observations expérimentales, en tenant compte des incertitudes propres à chacune. Cette approche permet non seulement de réduire l'impact du bruit sur l'estimation, mais aussi de propager les incertitudes associées, offrant ainsi une méthode robuste pour analyser la cinématique des systèmes aéroélastiques complexes. Son fonctionnement repose sur un processus itératif en deux étapes : une première étape de mise à jour des données (8), suivie d'une étape de prédiction de l'état futur (7). Ces deux étapes s'appuient sur le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k) + q^p && \text{État} && (7) \\ Z_k &= h(X_k) + r && \text{Observation} && (8) \end{aligned}$$

L'équation d'état permet de prédire l'évolution du vecteur d'état  $X_k$  du système de l'instant  $k$  à l'instant  $k+1$  via la fonction d'évolution  $f$  et un bruit blanc gaussien  $q^p$  de matrice de covariance  $Q^p$ . L'équation d'observation, quant à elle, permet de relier l'espace d'état  $X_k$  aux mesures via la fonction  $h$ , qui projette notre état dans l'espace de mesure. Un bruit blanc gaussien  $r$  y est également ajouté, de matrice de covariance  $R$ .

L'algorithme de prédiction initialement décrit par Kalman suppose des fonctions  $f$  et  $h$  linéaires, mais il est possible de prendre les non-linéarités en compte via l'utilisation de filtres de Kalman étendus [4] ou de filtres de Kalman sans parfum. Le filtre de Kalman étendu procède à une linéarisation des équations autour de l'état courant pour propager les incertitudes du système. Cela nécessite donc de calculer les jacobiniennes des fonctions  $f$  et  $h$  autour de  $X_k$ . Le détail des calculs est présenté dans l'algorithme (1).

**Input:**  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  : estimation précédente de l'état  
 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$  : covariance de l'estimation précédente  
 $\mathbf{z}_k$  : mesure courante  
 $\mathbf{Q}_{k-1}^p, \mathbf{R}_k$  : covariances des bruits de processus et de mesure  
**Output:**  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  : estimation mise à jour de l'état  
 $\mathbf{P}_{k|k}$  : covariance mise à jour

### Étape 1 : Prédiction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) \\ \mathbf{F}_k &= \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_{k-1}^p \end{aligned}$$

### Étape 2 : Mise à jour (correction)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) && // \text{Innovation} \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1} && // \text{Gain de Kalman} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k \\ \mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \\ \text{return } &\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k} \end{aligned}$$

**Algorithm 1:** Filtre de Kalman Étendu (EKF)

## 3 Applications du filtre de Kalman au modèle HiFleW

La description de l'état de notre système se fait à travers le vecteur de coordonnées généralisées  $q$  décrit dans la section 2.1. Comme le mouvement est périodique, on peut supposer que le signal est harmonique, sous la forme décrite dans l'équation (9), où chaque composante  $q^m$  est décomposée selon

plusieurs harmoniques complexes de pulsation fondamentale  $\omega_0$  et d'amplitudes complexes  $C_l^m$ .

$$q^m(t) = \mathcal{R}\left(\sum_{l=1}^{N_h} C_l^m e^{l* i \omega t}\right) \quad (9)$$

Le but est de retrouver ces amplitudes complexes  $C_l^m$  à partir des données instantanées de la rotation harmonique associée à  $e^{l* i \omega t}$ , on posera donc les composantes  $A_l^m(t) = \mathcal{R}(C_l^m e^{l* i \omega t})$ ,  $B_l^m(t) = I(C_l^m e^{l* i \omega t})$  qui correspondent aux coordonnées du mode  $l$  dans le repère physique à l'instant  $t$ . La concaténation de ces composantes temporelles donne le vecteur d'état  $X_k$  à l'instant  $k$  (10). On notera particulièrement qu'on a alors la projection  $q^m(t) = \sum_{l=1}^{N_h} A_l^m(t)$ . La pulsation propre  $\omega_0$  est également ajoutée aux inconnues car celle-ci est amenée à évoluer en fonction de la vitesse de l'écoulement.

$$\underline{X}_k = \left[ A_1^1, B_1^1, \dots, A_l^m, B_l^m, \dots, A_{N_h}^{N_g}, B_{N_h}^{N_g}, \omega_0 \right]. \quad (10)$$

Pour l'équation d'évolution  $f$ , le but est dans un premier temps d'estimer l'état du système à partir de mesures bruitées, sans introduire de considérations sur le modèle aérodynamique. Compte tenu des hypothèses de périodicité introduites précédemment, la fonction d'évolution peut être définie par blocs, chaque bloc étant associé à une harmonique  $l$  d'une composante  $m$  des coordonnées généralisées. Cette dynamique s'obtient directement à partir des propriétés des vecteurs tournants complexes, qui permettent de décrire l'évolution temporelle de chaque mode sous forme harmonique.

$$\begin{bmatrix} A_l^m \\ B_l^m \end{bmatrix} \Big|_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos l \omega_0 \Delta t & -\sin l \omega_0 \Delta t \\ \sin l \omega_0 \Delta t & \cos l \omega_0 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_l^m \\ B_l^m \end{bmatrix} \Big|_t \quad (11)$$

Pour ce qui est de l'observation du système, elle s'appuie sur des cycles limites obtenus par simulation à partir du modèle présenté en Section 2.1. Les mesures de position sont ainsi générées numériquement, puis perturbées par l'ajout de bruit. Celui-ci est pour l'instant modélisé comme un bruit blanc gaussien noté  $\sigma_r$ , mais pourrait être remplacé par un bruit de quantification.

La fonction d'observation est directement déduite de l'expression de l'équation (1) en remplaçant  $u, v, w, \phi$  par leurs valeurs approximées et en choisissant  $(x, \eta, \xi)$  de manière à correspondre aux points de mesure des déplacements. Pour simplifier l'écriture des équations suivantes l'abus de notation  $\lambda(x, t) = \lambda(q_t)$  sera fait. Les points de mesure simulés sont situés au bord d'attaque et au bord de fuite de l'aile ( $\eta = 0$ ,  $\xi = \pm b/2$ ), répartis uniformément en 30 points le long de l'envergure. Notons  $Y_s$  le vecteur contenant les positions simulées de ces points à un instant donné  $k$  et  $Y_r$  leurs positions bruitées, on a alors :

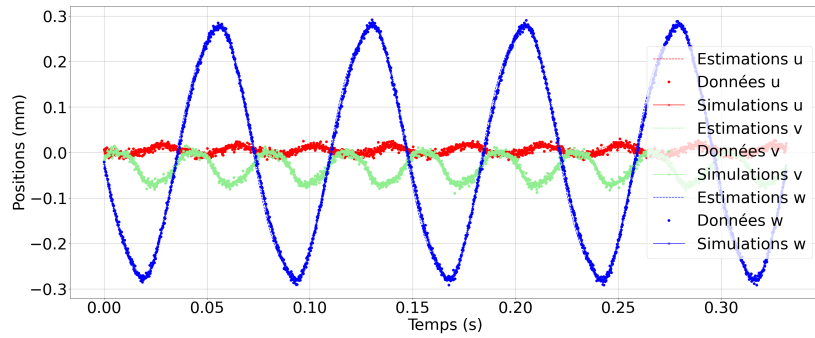
$$Y_r = Y_s + \sigma_r = \underline{P}''(x, \eta, \zeta, q_k) + \sigma_r \quad (12)$$

Avec

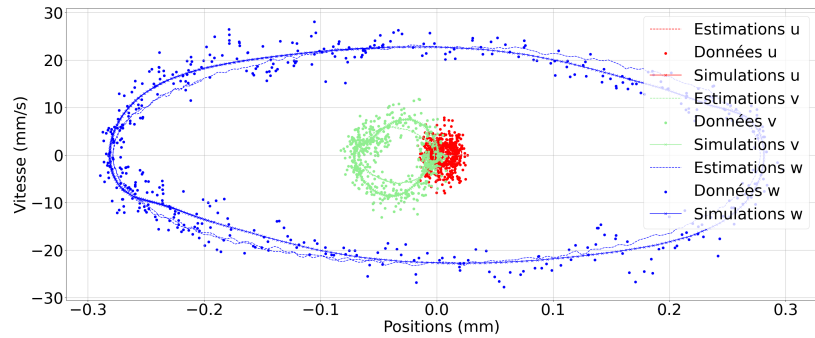
$$\underline{P}''(x, \eta, \zeta, q_k) = \begin{bmatrix} x + u(q_k) \\ v(q_k) \\ w(u(q_k)) \end{bmatrix} + \mathbf{R}^T(q_k) \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Finalement, pour faire fonctionner le filtre de Kalman, il est nécessaire de quantifier la matrice de covariance du bruit de mesure  $\mathbf{R}$  et celle du bruit d'évolution  $\mathbf{Q}^p$ , ainsi que d'initialiser le vecteur d'état  $X_0$  et son incertitude  $\mathbf{P}_{00}$ . La matrice  $R$  est directement déduite du type et de l'amplitude du bruit ajouté numériquement. La matrice  $\mathbf{Q}^p$  a été réglée empiriquement comme  $\mathbf{Q}^p = \mathbf{I}_n \times 10^{-7}$  et l'on initialise  $X_0 = 0$ ,  $\mathbf{P}_{00} = \mathbf{I}_n \times 10^4$  avec  $\mathbf{I}_n$  la matrice identité de taille  $n$  correspondant à la taille du système. L'adaptation de  $\mathbf{Q}^p$  au court des itérations est également envisageable selon d'autres algorithmes adaptatifs [10].

L'évolution temporelle du filtrage de la position (x-rouge, y-vert, z-bleu) d'un point situé à l'extrémité libre est présentée sur la Figure 4a sous le nom "Estimations" représentées en pointillés. Ces données estimées sont obtenues à partir de données bruitées, représentées par des points, sous le nom "Données". Les données simulées, initialement sans bruit à partir du modèle 2.1, sont tracées en trait plein sous le nom "Simulations". L'estimation est considérée comme bonne lorsqu'il y a peu d'écart entre le trait plein et le trait en pointillés. On y observe que la solution estimée et reprojctée présente un léger retard par rapport aux données simulées. Une légère déformation du cycle limite peut également être observée sur la Figure 4b. Des travaux futurs, fondés sur l'exploitation des données cinématiques acquises, seront menés. Dans ce cadre, une réduction de l'erreur de phase ainsi que de l'erreur d'accélération est requise.



(a) Évolution temporelle de la position d'un point



(b) Diagramme de phase

FIGURE 4 – comparaison des données reconstruites par le filtre de Kalman et données directement simulées

## 4 Conclusion et perspectives

Le calcul de la vitesse critique et du cycle limite pour l'aile de Goland a pu être réalisé et validé à l'aide du modèle réduit. Les données simulées ont ensuite été utilisées dans un filtre de Kalman afin d'estimer l'état du modèle à partir d'un certain nombre de points de mesure virtuels. Cette approche permet de reconstruire virtuellement la cinématique du modèle lors du cycle limite à partir de mesures synthétiques.

Il devient alors possible d'évaluer la précision de l'estimation en fonction du nombre de points de mesure, de leur précision, ainsi que de l'éventuelle présence de phénomènes de retard dans l'estimation liés à la fréquence d'échantillonnage. Un aspect encore non traité ici concerne la présence de biais entre les mesures et le modèle, qui pourra être étudié ultérieurement.

Enfin, cette étude sera étendue à une aile plus flexible, comme l'aile de Patil [12], ou à des essais virtuels reproduisant des configurations proches d'essais réels en soufflerie. La cinématique ainsi reconstruite servira ultérieurement à l'estimation des forces aérodynamiques à l'aide du modèle structurel associé. En effet, les modèles aérodynamiques utilisés jusqu'ici sont essentiellement analytiques et relativement simples ; l'objectif à terme est de mesurer les efforts aérodynamiques afin de valider ou d'enrichir ces modèles pour des ailes s'écartant des hypothèses classiques.

## Remerciements

Les auteurs remercient le ministère des Armées et l'Agence de l'innovation de défense pour leur soutien apporté à cette recherche.

## Références

- [1] Roberto ALCORTA, Benjamin CHOUVION, Guilhem MICHON et Olivier MONTAGNIER. « On the use of frictional dampers for flutter mitigation of a highly flexible wing ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 156 (2023), p. 104515.
- [2] Marco BERCI. « On aerodynamic models for flutter analysis : A systematic overview and comparative assessment ». In : *Applied Mechanics* 2.3 (2021).
- [3] Nicolas DI PALMA, Benjamin CHOUVION et Fabrice THOUVEREZ. « Parametric study on internal resonances for a simplified nonlinear blade model ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 141 (2022), p. 103941.
- [4] Adrien GOELLER, Jean-Luc DION, Ronan LE BRETON et Thierry SORIANO. « Kinematic SAMI : a new real-time multi-sensor data assimilation strategy for nonlinear modal identification ». In : *Mechanics & Industry* 21.4 (2020), p. 413.
- [5] Martin GOLAND. « The flutter of a uniform cantilever wing ». In : *Journal of Applied Mechanics* 4 (1945).
- [6] H HADDADPOUR et RD FIROUZ-ABADI. « Evaluation of quasi-steady aerodynamic modeling for flutter prediction of aircraft wings in incompressible flow ». In : *Thin-walled structures* 44.9 (2006), p. 931-936.
- [7] Dewey H HODGES et Earl H DOWELL. *Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades*. Rapp. tech. 1974.
- [8] Chris HOWCROFT, SA NEILD, MH LOWENBERG et Jonathan E COOPER. « Efficient aeroelastic beam modelling and the selection of a structural shape basis ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 112 (2019), p. 73-84.
- [9] Rudolph Emil KALMAN. « A new approach to linear filtering and prediction problems ». In : (1960).
- [10] Raman MEHRA. « Approaches to adaptive filtering ». In : *IEEE Transactions on automatic control* 17.5 (2003), p. 693-698.
- [11] Thomas E NOLL, Stephen D ISHMAEL, Bart HENWOOD, Marla E PEREZ-DAVIS, Geary C TIFFANY, John MADURA, Matthew GAIER, John M BROWN et Ted WIERZBANOWSKI. *Technical findings, lessons learned, and recommendations resulting from the helios prototype vehicle mishap*. Rapp. tech. National Aeronautics et Space Admin Langley Research Center Hampton Va, 2007.
- [12] Mayuresh PATIL. « Nonlinear aeroelastic analysis, flight dynamics, and control of a complete aircraft ». Thèse de doct. Jan. 1999.
- [13] Jean-Jacques SINOU. « Flutter instability and active aeroelastic control with time delay for a two-dimensional airfoil ». In : *European Journal of Mechanics-A/Solids* 92 (2022), p. 104465.